DOI: 10. 19650/j. cnki. cjsi. J2210739

FRP 层压复合梁结构屈曲变形在线监测方法*

赵飞飞,保 宏,郭彦浩
(西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

摘 要:为了实现梁结构屈曲变形在线监控,提出了一种 FRP 层合梁屈曲变形重构方法。首先,依据高阶剪切变形理论,提出了一种复合梁结构变形场描述方法,并基于冯卡门应变梯度理论,推导出了中性轴应变表述方式。然后,利用最小二乘变分法建立了位移重构模型。其中,利用四次 B-样条基函数构造了屈曲变形位移插值函数,推导了理论中性轴应变计算公式。并基于少量应变测量,提出了非线性项应变解耦方法,建立了测量应变与实测中性轴应变转换关系。最后,为了验证所提方法的精确性,以 25 层碳纤维复合梁为样件,搭建固定-简支梁试验平台,对其进行数值计算和试验论证。结果表明,建立的屈曲变形重构模型在不同轴向载荷作用时,位移场重构误差均小于 8%。

关键词: 变形重构;屈曲变形;应变梯度理论;NURBS;非线性项应变解耦
中图分类号: TH410 **文献标识码**: A **国家标准学科分类代码**: 410. 20

Online monitoring method for buckling deformation of FRP laminated beams

Zhao Feifei, Bao Hong, Guo Yanhao
(*School of Mechano-Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

Abstract: To achieve the online monitoring of the buckling deformation of the beam structure, a shape sensing method for monitoring the buckling deformation of FRP composite beam structure is proposed. Firstly, according to the higher order shear deformation theory, a method for describing the deformation field of laminate composite beam structure is proposed. Based on the von Karman strain gradient theory, the section strain expressions are derived. Then, the least square function is employed to formulate the displacement reconstruction model. In this model, the displacement interpolation functions are constructed by using the quartic non-uniform rational B-splines (NURBS) basis function as the shape function, and the theoretical section strain field formulation is derived. Based on a small number of discrete point strain measurement values, a nonlinear strain decoupling method is proposed, and the transformation relationship between surface strains and measured section strains is established. Finally, to evaluate the accuracy and effectiveness of the proposed method, a simply supported beam test platform is established with 25 layer carbon fiber composite beams as samples, and its numerical calculation and experimental demonstration are carried out. Results show that the proposed model and the reconstruction displacement error is less than 8% under different axial loads.

Keywords: deformation reconstruction; buckling deformation; strain gradient theory; NURBS; nonlinear term strain decoupling

0 引 言

复合结构广泛应用于航天、土木和机械领域。然而在实际工程中,复合层合结构在压、剪等载荷作用时,结构发生屈曲变形,很容易引起结构系统局部失稳,导致整个结构过早损坏。因此,对结构屈曲变形在线监测,实时反馈结构服役状况,对保持结构系统安全、稳定运行非常重要[1-3]。

目前国内外对于屈曲变形分析主要分为数值解和解析解。由于大多数实际工程问题经抽象、简化后得到的均是非线性偏微分方程,所以此类方程一般没有解析解。通常将有限元法或者软件迭代逼近获得数值解作为准确解。目前数值解法包含 4 类[4],分别为瑞

收稿日期:2022-11-18 Received Date: 2022-11-18
*基金项目:国家自然科学基金(52275542)项目资助

利-里茨法、牛顿-拉弗森法和、限元法和打靶法。瑞利-里茨法是一种基于变分原理,将微分方程转换为泛函,并结合形函数进行求解的方法[5-6]。牛顿-拉弗森法是一种利用泰勒展开多项式,经过不断迭代计算求解非线性方程的数值方法[7]。有限元法是一种求解微分方程组的数值计算方法,其基于变分原理和加权余量法,将非线性方程转化为线性代数方程组求解[8-9]。打靶法是一种对微分方程边界值问题行之有效的求解方法[10]。

上述屈曲变形求解方法均在离线条件下实现。然而,在实际工程中,由于一些不可预测环境载荷(如风载、雨载等)应用于机械结构,使得结构变形偏离了离线分析结果,因此,需要实时对结构系统进行动态监测,并依据监测结构对系统运行状态进行调整。当前结构变形在线测量方法主要分为两类,非接触式测量(如摄影测量[11-13]、激光追踪仪测量[14])和接触式测量。尽管非接触测量方案能够实现结构变形在线测量,但在实际工程中,结构关键件安装位置复杂,相互遮挡,所以摄影测量和激光追踪测量很难实现变形在线测量。针对这一问题,接触式变形测量方案能很好实现这一目的。目前接触式测量方法主要有曲率法、自主学习法、模态法和逆有限元法。

曲率法是基于经典梁理论,利用大量的应变传感器网络来测量离散点应变,并基于应变积分法来建立实测应变和重构位移之间的函数关系[15-17]。这类方法能够精确重构位移,但仅能给出一维方向的位移和相应转角。自主学习法是基于神经、模糊网络的泛化能力来构建应变-位移重构关系[18-19]。该方法应用非线性变形监测时存在两方面问题:一个是容易出现“一对多问题”;另一个是小应变大变形问题,这导致网络无法训练,进而无法应用于非线性变形监测。模态法是基于分段或者全局形函数,利用少量的离散点应变信息来重构整个变形场[20-21]。在利用模态法重构结构变形过程中,重要的一步就是利用有限元仿真结果来获得结构模态振型。然而,在利用模态法建立应变-位移转换关系时,前提假设认为结构模态振型信息保持不变。非线性变形使得应变-位移模态矩阵随着变形不同而变化。因此该方法不再适用。逆有限元法是由 Tessler 等[22]针对板、壳结构提出的一种由离散点测量应变值计算结构三维变形的重构算法。其基本思想是通过少量离散点应变值重构中性轴应变场,进而利用泛函建立测量应与变形位移之间的函数关系。该变形重构方法仅与测量应变有关系,而与结构材料属性、惯性/阻尼系数以及外载荷等信息无关。Savino 等[23]和 Roy[24-25]对逆有限元法变形重构模型做了大量改进工作,相应成果已经应用到板、梁和桁架结构的变形重构模型中。Zhao 等[26]基于重构位移的精确性和稳定性建立了应变传感器位置优化模型,并结合试验验证了优化模型的有效性。随后,针对变截面梁单元,提出了截面刚度线性化法,并利用 NURBS 基函数作为插值形函数,建立变截面梁变形感知模型,该方法已经运用到了机翼变形测量实验中[27]。随后,Kefal 等[28-29]将逆有限元与 zigzag 理论进行耦合,建立复合结构变形重构模型。

然而,对于梁结构的屈曲变形,由于涉及非线性变形场理论,所以国内外目前尚未在这一方面开展研究。本文针对复合梁屈曲变形问题开展研究。首先,基于高阶剪切变形理论提出复合梁屈曲变形位移场公式,并基于冯卡门应变理论推导中性轴应变。然后,利用逆有限元法建立了屈曲变形重构模型。其中,利用四次 NURBS 基函数作为形函数推导位移场和中性轴应变场函数,并建立表面应变与测量中性轴应变之间的转换关系。最后,为了论证所提的屈曲变形在线监测方法,以 25 层碳纤维复合梁为样件进行数值计算和实验论证。实验结果表明,本文建立的屈曲变形在线监测模型能够精确、有效的重构结构变形位移。

1　变形场理论

1.1　位移场公式

对于一个长度为 L,宽度为 b,高度为 h 的 n 层纤维基层合梁结构,如图 1 所示。当轴向载荷作用右端时,其位移场[30]可表示为:

$$u_x(x,z) = u(x) - zw_{,x} + f(z)u_0 \tag{1}$$

$$u_z(x,z) = w(x) \tag{2}$$

式中:u_x、u_z 表示梁内任意一点沿轴向和剪切方向的变形位移;u、w 表示中性轴上任意一点沿坐标轴方向位移;$f(z)$表示剪切应变沿厚度方向的分布;u_0 表示截面畸变变形位移;w_x表示位移 w 的一阶导数。其中依据 Reddy 高阶剪切变形理论,$f(z)$函数[31]可以表示为:

$$f(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \tag{3}$$

式中:z 表示纵向坐标;h 表示梁的高度,如图 1 所示。

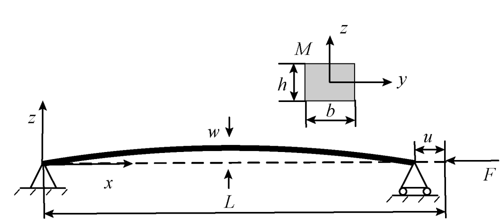


图 1　固定-简支的梁轴向受力模型

Fig. 1　Fix-support beam model subjected axial load

1.2 应变场函数推导

当复合梁轴线发生中度转角变形时,依据冯·卡门变形场理论,任意一点应变[32]可以表示为:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{3,i}u_{3,j})\quad i,j=x,z \tag{4}$$

式中:ε_{ij} 表示应变;u_{ij} 表示位移函数 u_i 对变量 j 求导。

随后,将位移场函数式(1)、(2)代入式(4)时,可得梁内任意一点应变为:

$$\varepsilon_{xx}(x,z)=u_{,x}-zw_{,xx}+fu_{0,x}+\frac{1}{2}w_{,x}^2 \tag{5}$$

$$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=f_{,z}u_0 \tag{6}$$

其中,设:

$$\begin{aligned}&e_1(x)=u_{,x}+\frac{1}{2}w_{,x}^2\\&e_2(x,z)=w_{,xx}-\left(1-\frac{4z^2}{3h^2}\right)u_{0,x}\\&e_3(x,z)=u_0\end{aligned} \tag{7}$$

因此,应变场可进一步可以化简为 $\varepsilon_{xx}(x,z)=e_1-ze_2$;$\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=f_{,z}e_3$。

由拉伸应变 e_1,薄膜应变 e_2 和弯曲应变 e_3 组成的中性轴应变向量为:

$$\boldsymbol{e}=\{e_1,\ e_2,\ e_3\} \tag{8}$$

2 屈曲变形重构模型

本文利用逆有限元法建立测量中性轴应变 $\boldsymbol{e}^{\varepsilon}$ 与理论中性轴应变 $e(\boldsymbol{u})$ 之间的函数如下:

$$\boldsymbol{\Phi}=\|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{e}^{\varepsilon}\|^2 \tag{9}$$

考虑到中性轴应变 e_1 中含有高阶非线性项,式(9)可分解为两项之和,即:

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}_{Axial}+\boldsymbol{\Phi}_{bending} \tag{10}$$

式中:

$$\boldsymbol{\Phi}_{Axial}=\sum_{i=1}^{n}(e_{1i}(\boldsymbol{u})-e_{1i}^{\varepsilon})^2 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{Bending}(\boldsymbol{u})=\sum_{k=2}^{3}\left(\sum_{i=1}^{n}[e_{ki}(\boldsymbol{u})-e_k^{\varepsilon i}]^2\right)\quad i=1,2,\cdots,n \tag{12}$$

同时,基于有限元思想,对复合梁结构位移场进行离散化,并通过 C^0 形函数进行拟合插值,即:

$$\boldsymbol{u}\simeq\boldsymbol{u}^h=\boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{u}^e \tag{13}$$

式中:$\boldsymbol{u}=\{u,\ v,\ u_0\}$ 是位移场自由度变量;$\boldsymbol{N}(x)$ 是插值形函数矩阵;$\boldsymbol{u}^e$ 是节点向量。随后将位移场插值函数代入式(7)进行求导,获得理论中性轴应变 e_2 和 e_3 的表达式,进而代入式(12)中建立弯曲函数的二次形式:

$$\boldsymbol{\Phi}_{Bending}=\sum_{k=2}^{3}\left(\sum_{i=1}^{n}((\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{u}^e-2(\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_k^{\varepsilon i}+\boldsymbol{c})\right) \tag{14}$$

式中:$\boldsymbol{B}$ 是由形函数 N 和 N 的一阶导数构成;$\boldsymbol{c}$ 是常向量。当对式(14)关于节点变量 $\boldsymbol{u}^e$ 求解最小变分时,即可获得弯曲变形重构模型,即:

$$\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{u}^e=\boldsymbol{f}^e \tag{15}$$

式中:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{k}^e=\sum_{k=2}^{3}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(x_i))\right)\\&\boldsymbol{f}^e=\sum_{k=2}^{3}\left(\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{e}_k^{\varepsilon i})\right)\end{aligned} \tag{16}$$

式中:矩阵 $\boldsymbol{k}^e$ 类似于有限元法中的刚度矩阵,与中性轴应变位置坐标有关,矩阵 $\boldsymbol{f}^e$ 类似于与有限法中载荷矩阵,与中性轴应变数值及位置坐标有关。因此,当1组测量中性轴应变 $\boldsymbol{e}^{\varepsilon}$ 代入上式,并通过求逆运算,可获得节点变量 $\boldsymbol{u}^e$,进而代入插值函数式(13)中,获得截面畸变函数 u_0 和弯曲位移 w。

当上文获得弯曲位移 w 代入式(7)时,拉伸应变 e_1 仅为轴向位移 u 的函数。因此式(11)可以表示为:

$$\boldsymbol{\Phi}_{Axial}=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{B}_x\boldsymbol{u}_x^e-e_{xi}^{\varepsilon})^2 \tag{17}$$

同时,中性轴应变 $\boldsymbol{e}_x^{\varepsilon}$ 可通过下式求解获得:

$$\boldsymbol{e}_x^{\varepsilon}=\boldsymbol{e}_1^{\varepsilon}-(\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{u}_w)^2 \tag{18}$$

式中:矩阵 $\boldsymbol{B}_x$ 是由轴向位移形函数的一阶导数。类似于弯曲位移建模求解过程,基于最小二乘变分原理,对式(17)进行求解,结果如下:

$$\boldsymbol{k}_x^e\boldsymbol{u}_x=\boldsymbol{f}_x^e \tag{19}$$

式中:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{k}_x^e=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{B}_x^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{B}_x(x_i))\\&\boldsymbol{f}_x^e=\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{B}_x^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{e}_x^{\varepsilon i})\end{aligned} \tag{20}$$

进而,轴向节点位移 $\boldsymbol{u}_x$ 可获得,即 $\boldsymbol{u}_x=(\boldsymbol{k}_x^e)^{-1}\boldsymbol{f}_x^e$。并基于式(11)和(12)获得轴向位移函数。

3 位移场插值函数

由于NURBS基函数相比其他多项式(如拉格朗日插值、哈密顿插值)插值方法更能精确描述结构几何形状,所以广泛应用于几何图学。因此,本文将NURBS基函数作为插值形函数对变形场进行几何描述。首先,对于一条 p 阶,定义在节点向量 $\Xi=\{\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_{n+p},\xi_{n+p+1}\}$ 上的样条曲线,其函数式可以表示为:

$$C(\xi)=\sum_{i=1}^{n}N_{i,p}P_i \tag{21}$$

式中:ξ 表示节点变量;P_i 表示控制点;$N_{i,p}$ 表示样条基函数,其可通过递归方式来定义。

$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+p}}N_{i+1,p-1}(\xi) \tag{22}$$

其中,最低阶($p=0$)基函数 $N_{i,0}$ 定义为:

$$N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1, & \xi_i \leqslant \xi < \xi_{i+1}\\ 0, & 其他\end{cases} \tag{23}$$

同时,基函数的 k 阶导数通过下式获得:

$$N_{i,p}^{(k)}(\xi)=\frac{p}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}^{(k-1)}(\xi)+\frac{p}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+p}}N_{i+1,p-1}^{(k-1)}(\xi) \tag{24}$$

式中:若节点变量 ξ 在节点向量中重复出现 m 次,那么表示 B-样条函数在该节点变量处 C^{p-m} 次连续。然后,本文采用四阶 NURBS 基函数作为插值形函数来描述变形位移场,表示为:

$$\boldsymbol{u}(\xi)=\begin{bmatrix}u\\ w\\ u_0\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}R_{i,4}(\xi)\begin{bmatrix}u_i^e\\ w_i^e\\ u_{0i}^e\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}R_{i,4}(\xi)\boldsymbol{u}_i^e \tag{25}$$

式中:n 表示控制变量数目;$\boldsymbol{u}_i^e$ 是位移向量;参量 $\xi=x/L$。最后,将式(25)代入式(7)可得理论中性轴应变为:

$$\boldsymbol{e}=\sum_{i}^{n}\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{u}_i^e=\boldsymbol{B}\bar{\boldsymbol{u}}\quad \boldsymbol{e}=[e_2,\ e_3]^{\mathrm{T}} \tag{26}$$

式中:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}1 & \left(1-\dfrac{4z^2}{3h^2}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_{i,xx} & 0 & 0\\ 0 & R_{i,x} & 0\\ 0 & 0 & R_i\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n]\\ \bar{\boldsymbol{u}}=[\boldsymbol{u}_1^e,\ \boldsymbol{u}_2^e,\cdots,\boldsymbol{u}_n^e]\end{gathered} \tag{27}$$

同时,对于中性轴应变 e_1 存在:

$$e_x^{\varepsilon}=\sum_{i=1}^{n}R_{xi,x}u_{xi}^e=\boldsymbol{B}_x\boldsymbol{u}_x^e=e_1(\xi)-\frac{1}{2}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}^e)^2 \tag{28}$$

式中:$e_x^{\varepsilon}=\partial u/dx$ 为轴向位移 u 的一阶导数。

4　中性轴应变计算

对于位移场重构模型式(15)和(19),推导出了位移插值型函数,并且确定了理论中性轴应变计算公式。利用离散点应变测量值,建立表面应变与测量中性轴应变之间的转换关系。对于一个长 L,宽 b,高 h,由 n 层复合材料铺制而成的层和梁单元,如图 2 所示,其表面任意一点应变内可以表示为:

$$\varepsilon_2^*(x,z)=\varepsilon_x\cos^2\beta+\varepsilon_{xz}\cos\beta\sin\beta+\varepsilon_z\sin^2\beta \tag{29}$$

式中:β 表示线性应变传感器的安装方向与梁轴方向的夹角;ε_z 是小量,可忽略不计。将式(7)代入式(29)时,表面应变与中性轴应变之间函数关系为:

$$\varepsilon_2^*(x_i,z_i)=(e_1+z_ie_2)\cos^2\beta_i+f_{,z}e_3\cos\beta_i\sin\beta_i \tag{30}$$

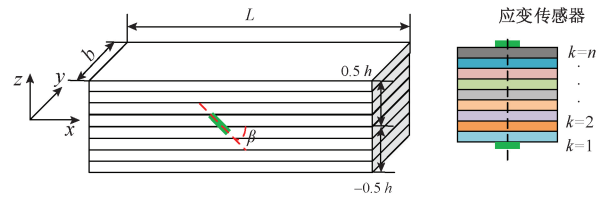


图 2　N 层复合梁

Fig. 2　N layer composite beam

如若,应变传感器采用上下对面安装方式,并与 x-轴间夹角为 0°,则中性轴应变 e_1、e_2 可表示为:

$$\begin{gathered}e_1^{\varepsilon}(x_i)=\frac{\varepsilon_{2i}^{+}(x_i,z_i)+\varepsilon_{2i}^{-}(x_i,-z_i)}{2}\\ e_2^{\varepsilon}(x_i)=-\frac{\varepsilon_{2i}^{+}(x_i,z_i)-\varepsilon_{2i}^{-}(x_i,-z_i)}{2z_i}\end{gathered} \tag{31}$$

同时,在同一截面侧面中间位置安装应变传感器(方向与轴向夹角 45°,如图 2 所示),弯曲应变 e_3 表示为:

$$e_3^{\varepsilon}(x_i,0)=\frac{\varepsilon_{2i}^{*}-e_1^{\varepsilon}\cos45°}{\cos45°\sin45°} \tag{32}$$

式中:上标"+"、"−" 分别表示测量应变来自于上、下表面。此时,函数 $f_{,z}(0)=1$。

本文采用四阶 NURBS 基函数来描述结构理论位移场,其一阶导数的多项式可以表示为:

$$\begin{cases}u_{,x}=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3\\ w_{,x}=a_5+a_6x+a_7x^2+a_8x^3\\ u_{0,x}=a_9+a_{10}x+a_{11}x^2+a_{12}x^3\end{cases} \tag{33}$$

式中:$a_i(i=1,\cdots,12)$ 为未知参数,由实测应变值确定。

对于图 1 所示的固定-简支梁结构,在两端存在以下边界条件:

$u(0)=0$;　$w(0)=0$;　$u_0(0)=0$;$w_{,x}(0)=0$;

$w(L)=0$;　$u_0(L)=0$。

代入式(33)中,有:

$$a_5=0 \tag{34}$$

当上述式代入式(5)时,实测中性轴应变多项式为:

$$\begin{gathered}e_1^{\varepsilon}(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+a_4x^3+\frac{1}{2}(a_6x+a_7x^2+a_8x^3)^2\\ e_2^{\varepsilon}(x,0)=a_6+2a_7x+3a_8x^2-\frac{2}{3}(a_9+a_{10}x+a_{11}x^2+a_{12}x^3)\\ e_3^{\varepsilon}(x)=a_9x+\frac{1}{2}a_{10}x^2+\frac{1}{3}a_{11}x^3+\frac{1}{4}a_{12}x^4\end{gathered} \tag{35}$$

进而结合离散点应变测量值,建立实测中性轴应变与未知参数 $a_i(i=1,2,\cdots,12)$ 之间的函数关系,具

体如下：

$$\begin{bmatrix} a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & -2/3 & -2/3x_1 & -2/3x_1^2 & -2/3x_1^3 \\ 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & -2/3 & -2/3x_2 & -2/3x_2^2 & -2/3x_2^3 \\ 1 & 2x_3 & 3x_3^2 & -2/3 & -2/3x_3 & -2/3x_3^2 & -2/3x_3^3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & 1/2x_1^2 & 1/3x_1^3 & 1/4x_1^4 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 & 1/2x_2^2 & 1/3x_2^3 & 1/4x_2^4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & 1/2x_3^2 & 1/3x_3^3 & 1/4x_3^4 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & 1/2x_4^2 & 1/3x_4^3 & 1/4x_4^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e_2^{\varepsilon}(x_1) \\ e_2^{\varepsilon}(x_2) \\ e_2^{\varepsilon}(x_3) \\ e_3^{\varepsilon}(x_1) \\ e_3^{\varepsilon}(x_2) \\ e_3^{\varepsilon}(x_3) \\ e_3^{\varepsilon}(x_4) \end{bmatrix} \tag{36}$$

随后，将上述参数代入式(33)，函数 $w_{,x}$ 和 $u_{0,x}$ 即可确定。最后，将离散点应变 e_1^{ε} 和函数 $w_{,x}$ 代入式(33)～(35)中，未知参数 $a_i(i=1,\cdots,4)$ 即可确定。

在实际工程中，每当 1 组测量应变值代入计算过程中，实时中性轴应变即可获。并且结合理论位移场函数和重构模型，实时屈曲变形位移即可获得。

5　实验验证

5.1　仿真分析

首先，在有限元分析软件(ABAQUS CAE 2017)中，基于经典层合板理论的材料本构模型[33]，建立长、宽、高分别为 $L=1\ 000$ mm，$b=10$ mm，$h=5$ mm 的悬臂-简支碳纤维梁模型，如图 3 所示。梁单元沿厚度由 25 层玻璃布板按照 $[(0)_{25}]$ 方向铺制而成，材料属性如表 1 所示。在建立悬臂-铰支梁模型(梁左端固定，右端铰支连接)时采用实体单元(C3D8)进行建模，并将其沿轴向划分为 500 个微小单元，横截面划分为 15 小块。求解方法为牛顿法，步数为 20 步。然后，依照图 3 的加载方式，右端分

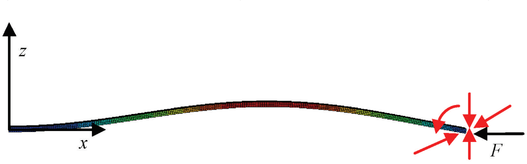


图 3　FRP 层合梁有限元模型

Fig. 3　Finite element model of FRP laminate beam

别施加轴向载荷，数值如表 2 所示。其中，依据材料力学理论知识[34]，可计算出压杆发生屈曲变形的临界力(式(37))。最后，利用表 3 的位置，提取应变点应，并代入第 4 节计算实验中性轴应变，进而结合第 2 节建立的变形监测模型，给出重构位移并进行重构精度分析，结果如图 4、5 所示。

表 1　复合梁材料属性

Table 1　Material properties of composite beam

材料属性	E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}、G_{12}/GPa	μ
数值	62. 2	8. 1	2. 1	0. 33

表 2　轴向压力数值

Table 2　Axial loads

应用案例	1	2	3	4
载荷数值/N	150	175	200	225

表 3　应变传感器位置

Table 3　Scheme of strain sensors placement

编号	位置	
1	(126 mm，0 mm，±2. 5 mm，0°)	(126 mm，0 mm，5 mm，45°)
2	(176 mm，0 mm，±2. 5 mm，0°)	(176 mm，0 mm，5 mm，45°)
3	(614 mm，0 mm，±2. 5 mm，0°)	(614 mm，0 mm，5 mm，45°)
4	(636 mm，0 mm，±2. 5 mm，0°)	(636 mm，0 mm，5 mm，45°)

$$F > F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(kL)^2} = 190\ \mathrm{N} \tag{37}$$

式中：E 为弹性模量；I 为惯性矩；kL 为长度因数(表 4)，取决于梁结构边界条件。

表 4　压杆的长度因数 kL

Table 4　Length factor of the pressure bar

固支	铰支-铰支	固定-自由	固定-固定	固定-铰支
长度因数	1	2	0. 5	0. 7

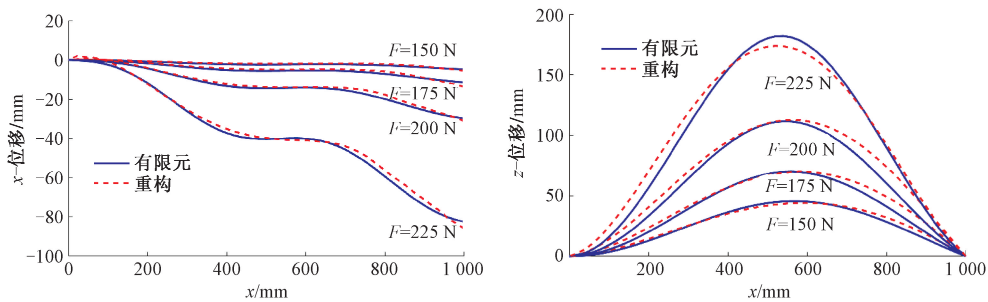
为了能够论证本文建立的屈曲变形监测模型的精确性和有效性，提出最大重构误差(maximum absolute error，MAE)、均方根误差(root mean squARe error，RMS)和相对均方根误差(relative root mean square error，RRMS)3 种评价指标，分别定义为：

$$\begin{aligned} MAE &= \mathrm{Max}\left|\left(disp^{pre}(x_i) - disp^{FE}(x_i)\right)\right| \\ RMS &= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(disp^{pre}(x_i) - disp^{FE}(x_i)\right)^2} \\ RRMS &= \frac{RMS}{\mathrm{Max}(\left|disp^{FE}(x_i)\right|)} \times 100\% \end{aligned} \tag{38}$$

式中：“$disp$”表示变形位移；上标“pre”和“FE”表示位

移分别来自于本文提出方法重构位移和有限元仿真分析位移。

4 种轴向载荷作用下的有限元仿真位移和重构位移对比如图 4 所示。从图 4 可知,当应用载荷小于临界载荷时,结构弯曲变形变化量较小(如轴向载荷从 150 N 增加到 175 N 时,弯曲变形增加 24 mm)。当应用载荷大于临界值时,结构弯曲变形变化量较大(如轴向载荷从 200 N 增加到 220 N 时,弯曲变形增加了 68 mm)。因此,可以充分论证在结构在屈曲变形阶段,相同的轴向载荷变化量,引起弯曲变形成倍增加。此外,还可以看出,利用本文提出的变形重构方法重构的位移曲线与有限元分析位移曲线在 x、z 方向非常接近,对这一接近程度进行数值分析如图 5 所示。图 5(b)表明在 4 种不同轴向载荷作用时,x、z 方向的 RRMS 分别小于 8% 和 7%。特别是在轴向载荷为 225 N 时,最大位移(MD)分别为−82.54 和 181.87 mm,RRMS 分别为 2.28% 和 3.91%。基于以上分析结果,充分说明本文提出的屈曲变形监测方法能够准确预测屈曲变形。

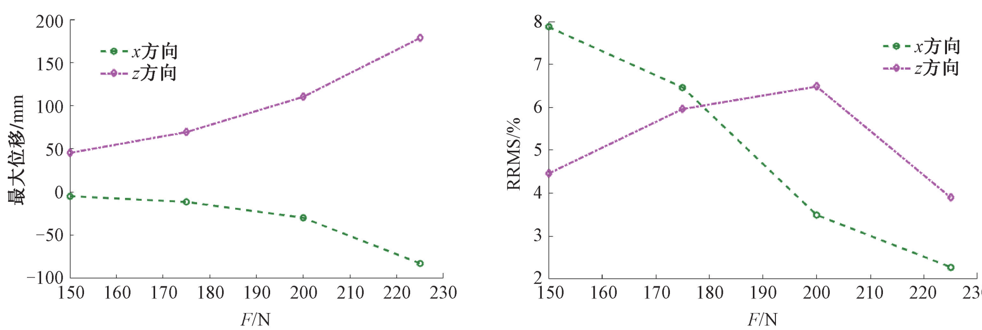


(a) x方向位移
(a) Axial displacements

(b) z方向位移
(b) Transverse shear displacements

图 4　重构位移与有限元分析位移对比

Fig. 4　Comparison of the reconstruction and finite element displacements



(a) 两方向最大位移
(a) The maximum displacements in two directions

(b) 相对均方根误差
(b) Relative root-mean-square errors

图 5　重构精度分析

Fig. 5　Reconstruction accuracy analysis

5.2　试验验证

为了进一步验证本文提出的屈曲变形监测方法的稳定性和有效性,搭建试验平台如图 6 所示。其中,碳纤维梁结构材料属性以及纤维铺层方式与有限元模型一致,并且以固定-铰支方式安装于试验平台上(梁右端通过螺栓和立柱固定,左侧与水平导轨相连接,在螺栓的作用下,可向右运动)。随后,依据表 3 布局方案,在梁表面安装光纤光栅应变传感器,以实时获取结构应变场信息。同时,利用加拿大北方数码股份有限公司(northern digital incorporation, NDI)生产的六维动态追踪系统获取位移传感器发光点,进而计算出梁当前空间位姿,如图 6(b)所示。其中六维动态追踪系统的测量精度为 0.1 mm。

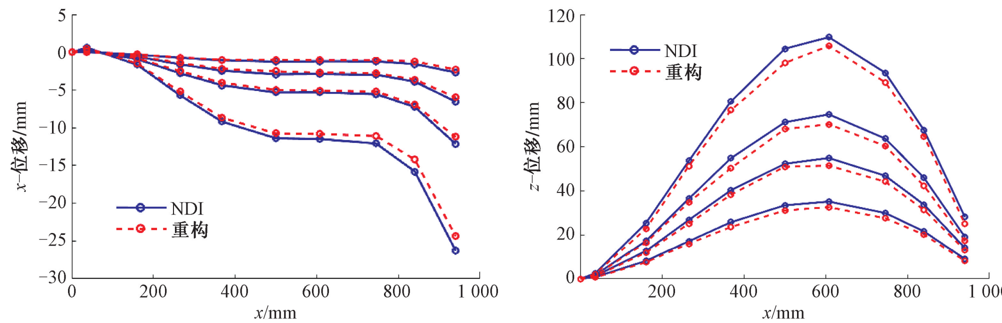
在不同轴向力作用下,利用测量应变重构变形位移场如图 7 所示。从图 7 可以看到,轴向和纵向重构位移与 NDI 测量位移均比较接近,在载荷 4 案例中,*MD* 为 23.63 和 109.74 mm,*MAE* 仅为 1.92 和 6.46 mm,并且 *RRMS* 仅为 3.71% 和 5.45%(表 5)。同时载荷 1 案例中,*MD* 为 2.68 和 33.44 mm,*MAE* 仅为 0.22 和 2.51 mm,*RRMS* 为 7.34% 和 7.35%。此外,从表 5 看到,在四种载荷案例中,位移场重构精度 *RRMS* 均小于 8%,与数值分析结果一致。因此,可以论证本文建立的 FRP 梁屈曲变形在线监测模型的精确性和有效。

(a) 固定-铰支安装方式
(a) Fixed-sliding support installation

(b) 位移测量系统
(b) Displacement measurement system

图 6 实验测试平台

Fig. 6 Experimental test platform



(a) x方向位移
(a) x direction displacements

(b) z方向位移
(b) z direction displacements

图 7 重构位移与 NDI 实测位移对比

Fig. 7 Comparison of reconstructed displacements and NDI measurement

表 5 重构精度分析

Table 5 Reconstruction accuracy analysis

指数	载荷 1		载荷 2		载荷 3		载荷 4	
	x	z	x	z	x	z	x	z
MD/mm	2.68	33.44	6.66	54.88	12.13	74.63	23.63	109.74
MAE/mm	0.22	2.51	0.56	3.48	0.91	4.46	1.92	6.46
RRMS/%	7.34	7.35	4.30	6.96	3.30	5.37	3.71	5.45

6 结 论

利用少量离散点应变信息实现层合梁单元屈曲变形在线监测,对结构系统稳定性的提前预警及复合结构的工程应用有重要意义。当前众多屈曲变形数值求解方法均是基于离线方式,不能实现在线动态监测,因此很难预警结构系统失稳现象。针对这一问题,本文提出了一种屈曲在线变形监测方法。首先回顾了层合梁屈曲变形位移场理论,基于冯卡门应变张量关系,推导了理论中性轴应变计算公式。然后,利用最小二乘变分法构建了理论中与实测中性轴应变之间的函数关系,从而建立了屈曲变形重构模型。其中,基于四阶 NURBS 基函数,构造了位移场和中性轴应变插值形函数。同时基于少量离散点应变测量值,提出了高阶项应变解耦计算方法,推导了实测中性轴应变场函数。最后,以 25 层碳纤维固定-铰支梁为实验平台,对其进行重构性能的精确性和稳定性验证。实验结果表明,本文建立的屈曲变形在线监测模型能够精确、稳定的重构当前结构空间位置信息,并且重构精度保持在 8% 以内。因此,本文所提的屈曲变形重构方法是一种非常有效的结构系统失稳预警方式。

参考文献

[1] KOPEC M, KOWALEWSKI Z L. Deformation of thin metal and composite sheets by using anti-buckling fixture

for large deformation under tension-compression cyclic loading [J]. Thin-Walled Structures, 2022, DOI: 10.1016/j.tws.2022.109886.

[2] ZARE M, ASNAFI A. Nonlinear pre and post-buckled analysis of curved beams using differential quadrature element method[J]. International Journal of Mechanical and Materials Engineering, 2019, DOI: 10.1186/s40712-019-0114-5.

[3] PRATO A, AL-SAYMAREE S H M, FEATHERSTON C A. Buckling and post-buckling of thin-walled stiffened panels: Modelling imperfections and joints [J]. Thin-Walled Structures, 2022, DOI: 10.1016/j.tws.2022.108938.

[4] 曾白卉. 工程中复合构件后屈曲变形分析建卓[D]. 长春:吉林大学,2019.
ZENG B H. Post-buckling deformation analysis of composite structure in engineering[D]. Changchun: Jilin University, 2019.

[5] 沈真惠. FRP 复合材料蜂窝结构面外受压时局部屈曲显示分析[D]. 上海:上海交通大学, 2015.
SHEN ZH H. Explicit local buckling analysis of FRP composite honeycombs under out-of plane compression [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2015.

[6] GUPTA R, GUNDA J B, JANARDHAN R. Post-buckling analysis of composite beams: Simple and accurate closed-form expressions [J]. Composite Structure, 2010, 92(8): 1947-1956.

[7] 陈庆远. 复合材料薄壁结构的屈曲和后屈曲分析[D]. 上海:上海交通大学, 2015.
CHEN Q Y. Buckling and post-buckling analysis of thin-walled composite structures [D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2015.

[8] GHOMSHEI M, ABBASI V. Thermal buckling analysis of annular FGM plate having variable thickness under thermal load of arbitrary distribution by finite element method [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2013(27):1031-1039.

[9] SILVA N M, CAMOTIM D, SIVERSTRE N. On the use of generalized beam theory to assess the buckling and postbuckling behavior of laminated CFRP cylindrical stiffened panels[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2010, 10(4): 737-760.

[10] 戚鹏程, 马连生. 考虑前屈曲耦合变形时功能梯度圆板的稳定性分析[J]. 力学研究, 2022, 43(2): 234-242.
QI P CH, MA L SH. Stability analysis of functionally graded simply-supported beams considering pre-buckling coupling deformation [J]. Chinese Journal of Solid Mechanics, 2022,43(2):234-242.

[11] 谷柳凝, 宫文然, 邵新星, 等. 基于主应变场的混凝土全表面开裂特征实时测量与分析[J]. 力学学报, 2021, 53(7): 1962-1970.
GU L N, GONG W R, SHAO X X, et al. Real time measurement and analysis of full surface cracking characteristics of concrete based on principal strain field[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2021, 53(7): 1962-1970.

[12] 黄喆, 程二静, 齐鹏, 等. 基于线结构的盾尾间隙测量方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(5): 93-101.
HUANG ZH, CHENG ER J, QI P, et al. Research on the shield tail clearance measurement method based on line structured light [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022,43(5):93-101.

[13] 黄桂平, 马开锋, 柏宏武, 等. 大型可展开天线型面热变形近景摄影测量[J]. 机械工程学报, 2020, 56(11):65-71.
HUANG G P, MA K F, BAI H W, et al. Close-range photogrammetry for surface thermal deformation of large-scale deployable antennas [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(11): 65-71.

[14] BAKUNOWICZ J, MEYER R. In-flight wing deformation measurements on a glider[J]. The Aeronautical Journal, 2016, DOI: 10.1017/aer.2016.98.

[15] 许滨华, 何宁, 何斌, 等. 基于分布式光纤传感器的管道受弯变形监测试验研究[J]. 仪器仪表学报, 2019,40(8):20-30.
XU B H, HE N, HE B, et al. Experimental study on pipeline bending deformation monitoring based on distributed optical fiber sensor[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019,40(8):20-30.

[16] 夏力, 王大鹏. 结合 OFDR 与 Ko 位移理论的变形估算研究[J]. 光通信技术, 2021,49(7):53-55.
XIA L, WANG D P. Study of deformation estimation combining OFDR and Ko displacement theory [J]. Optical Communication Technology, 2021, 49 (7): 53-55.

[17] FILIPPO V, MARCO E, MARCO G. Shape sensing for an UAV composite half-Wing: Numerical comparison between modal method and Ko's displacement theory[J]. Aerospace, 2021,9(9):509-509.

[18] ROB B N, FANG G X, TIAN Y J et al. Sensing and reconstruction of 3-D deformation on pneumatic soft robots[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2021,26(4):1877-1885.

[19] 陈志，席隆. 全程可控的微重力试验装置应变传感器布局优化研究[J]. 电子测量与仪器学报，2021，35(8)：62-69.
CHEN ZH, XI L. Study on the placement optimization of strain sensors in the CSU electromagnetic microgravity tower [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2021,35(8): 62-69.

[20] BANG H J, KO S W, JANG M S, et al. Shape estimation and health monitoring of wind turbine tower using a FBG sensor array[C]. Proceedings of the IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2012.

[21] KANG L H, KIM D K, HAN J H. Estimation of dynamic structural displacements using fiber bragg grating strain sensors[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 305(3): 534-542.

[22] TESSLER A, SPANGLER J L. A variational principal for reconstruction of elastic deformation of shear deformable plates and shells[Z]. NASA Technical Paper, NASA/TM-2003-212445.

[23] SAVINO P, GHERLONE M, TONDOLO F, et al. Shape-sensing of beam elements undergoing material nonlinearities[J]. Sensors, 2021,21(2):528.

[24] ROY R, GHERLONE M, SURACE C, et al. A shape sensing methodology for beams with generic cross-sections: Application to airfoil beam [J]. Aerospace Science and Technology, 2021, 110(18):106484.

[25] ROY R, TESSLER A, GHERLONE M, et al. Efficient shape sensing of plate structures using the inverse finite element method aided by strain pre-extrapolation [J]. Thin-Walled Structures, 2022, 180(4):109798.

[26] ZHAO F F, BAO H, XUE S, et al. Multi-objective particle swarm optimization of sensor distribution scheme with consideration of the accuracy and the robustness for deformation reconstruction[J]. Sensors, 2019, 19(6): 1-12.

[27] ZHAO F F, BAO H, DU J L. A real-time deformation displacement measurement method for Timoshenko beams with multiple singularities [J]. IEEE Transactions on Instrumentation & Measurement, 2021, DOI: 10.1109/TIM.2021.3086889.

[28] KEFAL A, TABRIZI I E, TANSAN M, et al. An experimental implementation of inverse finite element method for real-time shape and strain sensing of composite and sandwich structures [J]. Composite Structure, 2021,258: 113432.

[29] KEFAL A, TESSLER A, OTERKUS E. An enhanced inverse finite element method for displacement and stress monitoring of multilayered composite and sandwich structures [J]. Composite Structure, 2017, DOI: 10.1016/j.compstruct.2017.07.078.

[30] SMIR A E. Analysis of shear-deformable composite beams in postbuckling[J]. Composite Structures, 2011, 94:24-30.

[31] REDDY J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1984(51):745-52.

[32] SHOJAA R. A micro scale geometrically nonlinear Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics,2012(47):863-873.

[33] 高艳红,张伟. 轴向可伸缩悬臂复合材料层合板的建模及数值分析[J]. 动力学与控制学报,2023,21(2):41-48.
GAO H Y, ZHANG W. Modeling and numerical analysis of telescopic cantilever composite plate[J]. Journal of Dynamics and Control, 2023,21(2):41-48.

[34] 刘鸿文. 材料力学[M]. 北京:高等教育出版社, 2003.
LIU H W. Mechanics of materials[M]. Beijing: Higher Education Press,2003.

作者简介

赵飞飞(通信作者),2021 年于西安电子科技大学获得博士学位,现为西安电子科技大学讲师,主要研究方向为结构健康监测方向,变形感知。

E-mail: zhaofeifei@xidian.edu.cn

Zhao Feifei (Corresponding author) received his Ph. D. degree from Xidian University in 2021. He is currently an assistant professor at Xidian University. His main research interests include structural health monitoring and shape sensing.