DOI：10. 19650/j. cnki. cjsi. J2210298

基于多翼型特征的非奇异变形感知方法研究*

陈康宇[1]，保　宏[1,2]，贺大航[1]，陈光达[1]，冷国俊[3]

（1. 西安电子科技大学机电工程学院　西安　710075；2. 西安电子科技大学杭州研究院　杭州　311231；
3. 中国电子科技集团公司第二十九研究所　成都　610000）

摘　要：针对传统变形感知方法在复杂翼型结构中常见的病态、奇异等问题，提出了一种基于多翼型特征的非奇异变形重构模型。依据 Timoshenko 梁变形理论，采用依存插值技术离散单元位移场，建立理论截面应变与测量应变的最小二乘变分函数，推导单元节点变形与测量应变的积分重构模型。该模型的位置无关性有效消除评估截面选取不当引起的奇异，增强重构模型在复杂翼型结构中的适用性。同时，针对应变传感器服役期间常见的环境扰动，以重构精度与鲁棒性为评估指标，建立自适应多目标粒子群优化模型。实验结果表明，提出的重构模型整体测量精度较高，在机翼变形量小于 20 mm 范围内最大绝对误差为 0. 26 mm，最大相对均方根误差为 0. 42%；当变形量增大时，绝对误差随之增大，但相对均方根误差不超过 3. 5%。因此基于多翼型特征的非奇异变形重构模型能够满足机翼实时重构需求，有效扩展变形感知方法在复杂结构中的应用价值。

关键词：形状感知；非奇异准则；翼型结构；逆问题；依存插值

中图分类号：TH89　TP391　　**文献标识码**：A　　**国家标准学科分类代码**：420. 40

Research on the non-singular shape sensing method based on multi-airfoil features

Chen Kangyu[1]，Bao Hong[1,2]，He Dahang[1]，Chen Guangda[1]，Leng Guojun[3]

（*1. School of Electro-Mechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710075, China; 2. Hangzhou Research Institute of Xi'an University of Electronic Science and Technology, Hangzhou 311231, China; 3. Southwest China Research Institute of Electronic Equipment, Chengdu 610000, China*）

Abstract：To solve the ill-conditioned and singular problems of complex airfoil structures in traditional deformation sensing methods, a non-singular deformation reconstruction model based on multiple airfoil features is proposed. Based on the Timoshenko beam deformation theory, the element displacement field is discretized by using the dependency interpolation technique. A least squares variational function of theoretical surface strain and measured strain is established. Then, the reconstruction model between element node deformation and measured strain is derived. The position independence of the reconstructed model effectively eliminates the singularity caused by improper selection of evaluation sections and enhances the applicability in complex structures. Meanwhile, an adaptive multi-objective particle swarm optimization model is formulated with reconstruction accuracy and robustness for overcoming environmental disturbances. Results show that the maximum absolute error is 0. 26 mm and the maximum relative root mean square error is 0. 42% when the deformation of the wing model is less than 20 mm. With the increase of deformation, the absolute error also increases. But, the relative root mean square error does not exceed 3. 5%. Therefore, the non-singular deformation reconstruction model based on multi-airfoil features can meet the requirements of real-time wing reconstruction and effectively extend the application value of deformation sensing method in complex structures.

Keywords：shape sensing；non-singular criterion；airfoil structures；inverse problem；dependent interpolation

收稿日期：2022-08-14　　Received Date：2022-08-14
＊基金项目：国家自然科学基金（51775401，52275542）项目资助

0 引　　言

智能化、轻量化、一体化已成为空基预警平台未来发展的方向。为提升平台探测威力，实现远距离大范围动态目标探测与跟踪，阵列天线需要与空基平台高度融合[1]，该类共形结构对天线轻量化提出更高要求，结构柔性增大。在复杂气动载荷作用下，天线表面易产生形变，严重制约天线电磁性能。因此有关学者提出主动电补偿概念[2]，通过在线感知机翼结构空间位姿，实时改变天线单元激励相位，从而达到电性能补偿目的。

传统基于光学成像的非接触式测量[3-4]，受限于测量环境、测量设备和安装条件，难以实现机翼结构在线测量的要求。基于应变信息的接触式测量，即形状感知，该方法只需将少量光纤光栅应变传感器埋入结构表层，便可根据建立的物理模型实时反演结构变形场，更适用于大型结构在线变形监测。已发展的形状感知方法主要包含 KO 位移理论[5-6]、模态法[7-8]、和逆有限元法[9-10]。美国德莱顿飞行研究中心 KO 等基于材料力学特性提出了 KO 位移理论，根据分段处理思想和位移叠加原理，实现大跨度梁结构变形重构。但该方法主要适用于弯曲变形，且重构精度严重依赖应变传感器的布置密度。Cui 等[11]发展了基于 KO 法的非线性位移重构模型，搭建了一种适用于轻质柔性无人机机翼一维弹性形变测量系统。模态法是基于模态叠加理论，以模态坐标为桥梁，建立应变到变形的映射关系，但该方法的重构精度严重依赖高保真有限元模型，在复杂结构中难以适用。同时 Lively 等[12]发现，高阶结构模态和低阶固有模态间的混叠会降低模态法的重建精度，需要借助滤波算法去除高阶频率对重构结果的影响，才能实现高精度变形感知。

针对模态法和 KO 位移法需要大量先验知识，Tessler 等利用加权最小二乘函数和变分原理建立结构三维重构模型，该重构模型只与测量应变有关，与结构材料属性、惯性/阻尼系数以及外载荷等信息无关，适用于具有复杂边界条件和拓扑结构的变形监测。由于其推导路径与有限元相反，也被称为逆有限元法（inverse finite element method，iFEM）。Roy 等[13]提出了适用于典型梁截面的 iFEM，该方法可用于处理航空航天结构中常见的几何复杂性；Gherlone 等[14]基于铁木辛柯梁弹性变形理论，将 iFEM 从航空航天领域拓展到机械工程领域，通过在结构表面粘贴光纤光栅传感器，从而实现静态和动态载荷作用下的复杂桁架结构三维形状感知。Zhao 等[15]利用精准 zigzag 变形理论和等几何分析法将 iFEM 扩展到复合压层板结构变形重构，准确表征了层压变形对平面位移中常数、线性和锯齿类变形的贡献。目前，iFEM 已成功应用到船体结构[16]、风力叶片[17]、龙门吊床[18]等结构的变形监测。

综上所述，采用逆有限元法重构变形场具有明显的优越性。但这种由已知测量应变反推未知结构变形是典型的逆问题，重构矩阵不满足阿达玛准则，不合理的评估截面或不恰当的传感器分布方案极易导致重构矩阵病态甚至奇异，限制了逆有限单元法在实际工程中的应用。因此，本文提出了一种高稳定性非奇异重构模型。该模型依据 Timoshenko 梁变形理论和小应变假设，推导了翼型结构表面应变与截面应变间的转换关系，构建了基于单元积分法的重构模型。改进后的重构矩阵满足位置无关性，有效避免评估截面选取不当带来的奇异。同时，针对应变传感器安装误差和环境扰动带来的重构误差，本文以精度与鲁棒性为评估指标，建立自适应多目标粒子群优化模型。最后，以复杂机翼框架结构为例，数值仿真和实验结果表明，提出的重构模型满足精度及可靠性要求，有效解决逆问题的奇异。

1 重构模型

1.1 Timoshenko 梁理论

欧拉梁和 Timoshenko 梁是目前梁状结构中最主流的计算理论模型。欧拉梁由于过度强化结构单元刚度，使其仅适用于低频阶段的细长梁。然而对于短粗梁或者处于高阶频率的细长梁，剪切变形对梁的弯曲贡献无法忽略。因此铁木辛柯等放宽了欧拉梁中的正态性假设，提出了考虑横向剪切变形的 Timoshenko 梁理论，其截面旋转与剪切关系如图 1 所示。

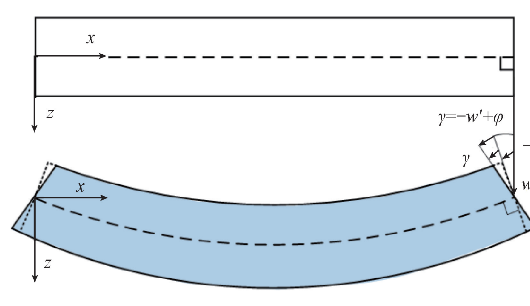


图 1　Timoshenko 梁弯曲变形

Fig. 1　The bending deformation of Timoshenko beam

以局部笛卡尔坐标系下的空间直梁为例，其材料属性满足线弹性、均匀性、各向同性。梁单元的外载荷分布情况及基本尺寸如图 2 所示。基于 Timoshenko 梁变形理论，空间 Timoshenko 梁属于六自由度单元，含有 3 个线位移和 3 个角位移。因此结构表面任意一点位移可表

示为:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x(x) \\ \theta_y(x) \\ \theta_z(x) \end{Bmatrix} \tag{1}$$

其中,$u(x)$、$v(x)$、$w(x)$分别表示该点在中性轴上映射点的平移位移,$\theta_x(x)$、$\theta_y(x)$、$\theta_z(x)$分别表示该点在中性轴上映射点的转角位移。

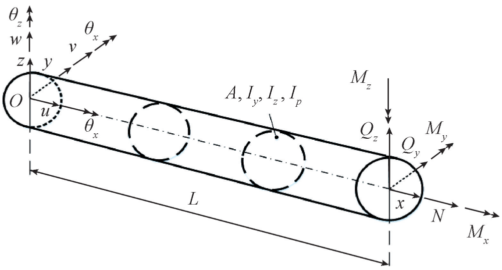


图 2　空间梁单元几何模型

Fig. 2　Geometric model of space beam element

根据位移-应变间的线弹性关系,结构表面任意点应变可表示为:

$$\begin{cases} \varepsilon_x(x,y,z) = e_1(x) + ze_2(x) + ye_3(x) \\ \gamma_{xz}(x,y) = e_4(x) + ye_6(x) \\ \gamma_{xy}(x,z) = e_5(x) - ze_6(x) \end{cases} \tag{2}$$

式中:ε_x 为 x 轴主应变,γ_{xy} 与 γ_{xz} 为平面切应变。$e(u)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}^{\mathrm{T}}$ 表示定义的中性轴数值应变向量,具体形式如下:

$$\begin{aligned} & e_1(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \quad e_4(x) = \frac{\partial w(x)}{\partial x} + \theta_y(x) \\ & e_2(x) = \frac{\partial \theta_y(x)}{\partial x} \quad e_5(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} - \theta_z(x) \\ & e_3(x) = \frac{\partial \theta_z(x)}{\partial x} \quad e_6(x) = \frac{\partial \theta_x(x)}{\partial x} \end{aligned} \tag{3}$$

基于依存差值原理,Timoshenko 梁单元整体自由度可通过端节点和内部节点表示,如图 3 所示。

$$\begin{aligned} & u(x) = \sum_{i=1,2} L_i^{(1)}(x) u_i \quad \theta_z(x) = \sum_{j=1,r,2} L_j^{(2)}(x) \theta_{zj} \\ & \theta_x(x) = \sum_{i=1,2} L_j^{(1)}(x) \theta_{xi} \quad \theta_y(x) = \sum_{j=1,r,2} L_j^{(2)}(x) \theta_{yj} \\ & v(x) = \sum_{i=1,2} L_i^{(1)}(x) v_i - \sum_{j=1,r,2} N_j^{(3)}(x) \theta_{zj} \\ & w(x) = \sum_{i=1,2} L_i^{(1)}(x) w_i + \sum_{j=1,r,2} N_j^{(3)}(x) \theta_{yj} \end{aligned} \tag{4}$$

其中依存插值形函数 L_i, L_j, N_j 最初由 Tessler 等[19]提出。为简化描述,式(4)可表示成以下矩阵形式:

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{N}(x)\boldsymbol{u}^e \tag{5}$$

根据应变位移关系,对式(5)两边同时求导,中性轴数值截面应变可表示为:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{N}'(x)\boldsymbol{u}^e = \boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{u}^e \tag{6}$$

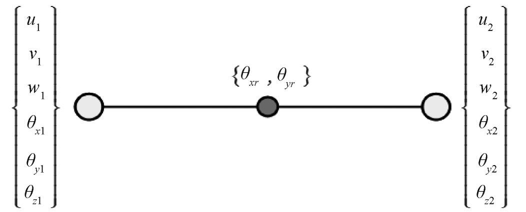


图 3　梁单元内部节点自由度

Fig. 3　Internal node degrees of freedom of beam element

由式(6)可知,理论截面应变场仅于插值形函数和节点自由度有关。若准确获得单元节点自由度,则可实时描述梁单元变形场。因此,利用有限的应变测量点确定出节点自由度是实现结构变形重构的关键步骤。

1.2　单元积分重构模型

单元节点自由度是重构几何变形场的关键要素。本节通过最小二乘法建立表面测量应变与数值中性轴应变的加权误差泛函,并利用离散测量应变点拟合中性应变,从而确定节点自由度。其中最小二乘误差泛函可被定义为:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) = \| \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{e}^{\varepsilon} \|^2 \tag{7}$$

考虑中性轴数值应变间存在互异性,引入权重因子对其修正,权重因子可表示为:

$$\boldsymbol{w}_k = \{1, I_y^e/A^e, I_z^e/A^e, 1, 1, I_p^e/A^e\} \tag{8}$$

其中,I_y^e, I_z^e, I_p^e 分别表示沿 y 轴、z 轴、极轴的惯性矩,A^e 为截面面积。此时,基于欧几里得范数表示的加权最小二乘误差函数如下:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{w}_k \frac{L}{N} \sum_{e=1}^{N} [\boldsymbol{e}_k(x_i) - \boldsymbol{e}_k^{\varepsilon i}]^2 \quad k = 1, \cdots, 6 \tag{9}$$

误差函数 L 为梁单元长度,N 为评估截面数量。在传统逆有限元中,往往需要根据载荷情况选择评估截面。然而在实际工程中,重构模型复杂,应变场分布不连续,评估截面选取困难,不恰当的截面数量与不合理的截面位置极易引起重构矩阵奇异,如图 4 所示。为解决重构矩阵奇异等问题,可通过离散积分法重新泛化加权最小二乘函数:

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{w}_k \int_0^L [\boldsymbol{B}(x)\boldsymbol{u}^e - \boldsymbol{e}_k^{\varepsilon i}]^2 \quad k = 1, \cdots, 6 \tag{10}$$

为进一步寻找节点自由度与实测应变间的联系,可将式(10)展开为以下形式:

$$\boldsymbol{\Phi} = \int_0^L (\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{k}^e \boldsymbol{u}^e - 2(\boldsymbol{u}^e)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}^e + \boldsymbol{c}^e \tag{11}$$

其中,$\boldsymbol{k}^e = \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{B}_k(x_i)$,$\boldsymbol{f}^e = \boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{e}_k^{\varepsilon}$,$\boldsymbol{c}^e$ 为常数向量。此时对误差函数 $\boldsymbol{\Phi}$ 关于节点自由度 $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ 求偏导,并令导数值为 0,即可获得泛函极小值。

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}^e} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}^e) = \boldsymbol{k}^e \boldsymbol{u}^e - \boldsymbol{f}^e = 0 \tag{12}$$

节点自由度函数可表示为：

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{F} \tag{13}$$

其中：

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{w}_i\int_0^l [\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{B}_k(x_i)]\boldsymbol{F} = \boldsymbol{w}_i\int_0^l [\boldsymbol{B}_k^{\mathrm{T}}(x_i)\boldsymbol{e}_k^{\varepsilon}] \tag{14}$$

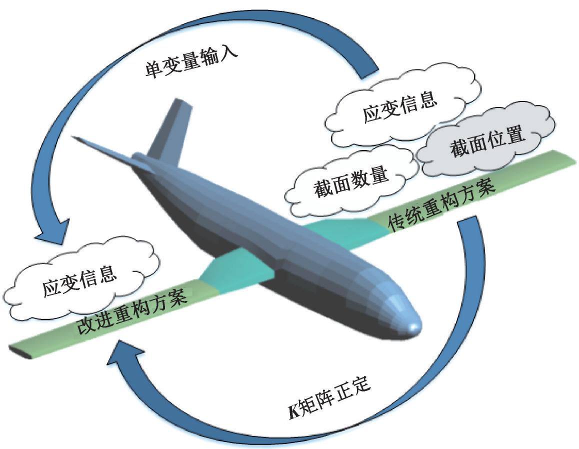


图 4 传统重构模型与改进重构模型对比

Fig. 4 Comparison between the improved reconstruction model and the traditional reconstruction model

式(13)中，$\boldsymbol{K}$ 为类刚度矩阵，是仅与评估截面位置有关的插值形函数，当使用单元积分法对整个结构进行运算时，$\boldsymbol{K}$ 始终保持正定。此外，改进后的类载荷向量 $\boldsymbol{F}$ 仅与实测中性轴应变有关，故该重构模型可将传统双变量优化问题降为单变量优化，极大程度降低计算成本，有效保障重构实时性。

1.3 广义应变转换矩阵

实测中性轴应变为积分重构模型唯一输入量。通过粘贴应变传感器可获得结构表面一点应变，却无法直接确定中性轴应变，因此建立实时应变转换关系是保证重构算法实施的关键。如图 5 所示，为进一步完善重构模型，本文以不规则翼型梁截面为例，考虑剪切应变在横截面上不均匀分布等现象，提出广义表面应变与中性轴应变间的转换矩阵。

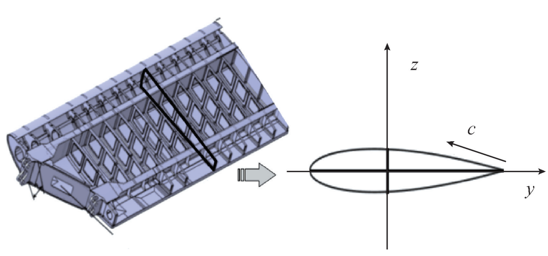


图 5 翼形梁截面形状

Fig. 5 Section shape of the airfoil beam

由于翼型截面梁符合 Timoshenko 梁理论，因此结构表面任意点应变仍满足式(3)。当对梁单元施加拉伸、扭转或剪切载荷时，梁表面上任意一点应变转换张量可以表示为：

$$\varepsilon^*(x,c,\beta) = \varepsilon_x(x,c)\cos^2\beta + \varepsilon_c(x,c)\sin^2\beta + \gamma_{xc}(x,c)\cos\beta\sin\beta \tag{15}$$

式中：ε_x 为轴向正应变；ε_c 为截面周应变；ε_c 为截面切应变；变量 β 和 c 分别表示应变传感器的轴线安装角及截面周向距离，如图 6 所示。

根据截面周应变与正应变间的线性关系，ε_c 可表示为：

$$\varepsilon_c = -\mu\frac{\sigma_x}{E} = -\mu\varepsilon_x \tag{16}$$

利用建立的应变关系，式(15)可进一步化简为：

$$\varepsilon^*(x,c,\beta) = \varepsilon_x(x,c)(\cos^2\beta - u\sin^2\beta) + \gamma_{xc}(x,c)\cos\beta\sin\beta \tag{17}$$

翼形结构剪切应变 γ_{xc} 主要承受剪切和扭转载荷，其具体形式可通过空间剪应变累加表示：

$$\gamma_{xc}(x,c) = \gamma_{xc}^x(x,c) + \gamma_{xc}^y(x,c) + \gamma_{xc}^z(x,c) \tag{18}$$

式中：γ_{xc}^x 表示扭转载荷作用下产生的剪应变；γ_{xc}^y 和 γ_{xc}^z 分别表示剪切载荷作用下的剪应变。然而，翼型截面的不规则性往往导致剪应变不满足常数分布，因此需要建立截面剪切应变与表面位置坐标间的变分函数，从而实现 γ_{xc} 的准确描述。 梁单元上任意一点的剪切应变可以表示为：

$$\gamma_{xc}(x,c) = e_6(x)\ f_1(c) + \gamma_{xc,\max}^y(x)f_2(c) + \gamma_{xc,\max}^z(x)\ f_3(c) \tag{19}$$

中性轴应变 e_6 在任意评估截面都服从常数分布，因此为提高求解效率，避免重复计算，可将 e_6 作为 γ_{xc}^x 的初始位，并利用提取的数值信息准确描述截面周向函数 $f_1(c)$。

当结构承受剪切外力 F_y，F_z 时，中性轴数值应变 e_4、e_5 不满足常数分布。为建立中性轴应变与表面应变间函数关系，以表面最大应变为桥梁，通过引入参数 k_{py} 和 k_{pz} 作为中间量，结合本构方程 $F_y = e_4k_yGA$ 和 $F_z = e_5k_zGA$，可获得以下函数连续：

$$\begin{aligned} k_{ey} &= \frac{e_5}{\gamma_{xc,\max}^y} = \frac{1}{\gamma_{xc,\max}^y}\frac{F_y}{k_yGA} \\ k_{ez} &= \frac{e_4}{\gamma_{xc,\max}^z} = \frac{1}{\gamma_{xc,\max}^z}\frac{F_z}{k_zGA} \end{aligned} \tag{20}$$

k_y 和 k_z 表示剪切修正系数，用于补偿恒定剪切应力假设造成的误差。对于简单的几何结构，剪切修正系数可通过查表进行确定，而对于复杂的无规则截面形状，需要根据理论剪切应变能与模型数值剪切应变能的比值确定。

$$
\begin{aligned}
k_y &= \frac{E_{SE}^{Tim}}{E_{SE}^{FE}} = \frac{F_y^2}{2AGE_{SE}^{FE}} = \frac{F_y}{AGe_5} \\
k_z &= \frac{E_{SE}^{Tim}}{E_{SE}^{FE}} = \frac{F_z^2}{2AGE_{SE}^{FE}} = \frac{F_z}{AGe_4}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

其中，E_{SE}^{Tim} 表示 Timoshenko 梁存储的剪切应变能，E_{SE}^{FE} 表示通过有限元模型获得的数值应变能。

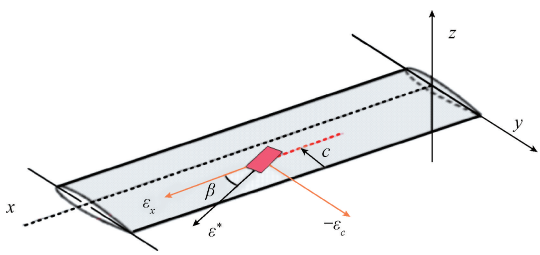


图 6　表面测量应变分布

Fig. 6　Position distribution of surface measured strain

当结构承受外载荷时，通过高保真有限元模型可准确获得结构参数 $k_{\varepsilon y}$、$k_{\varepsilon z}$ 和截面周向函数 $f(c)$。基于上述推导，可建立结构表面测量应变与中性轴数值应变 $e(u)$ 间函数关系：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^* = {} & e_1(x)(\cos^2\beta - \mu\sin^2\beta) + e_6(x)\, f_1(c)\cos\beta\sin\beta + \\
& [z(c)e_2(x) + y(c)e_3(x)](\cos^2\beta - \mu\sin^2\beta) + \\
& \left[\frac{1}{k_{\varepsilon y}}e_5(x)\, f_2(c) + \frac{1}{k_{\varepsilon z}}e_4(x)\, f_3(c)\right]\cos\beta\sin\beta
\end{aligned}
\tag{22}
$$

2　传感器布局及优化准则

2.1　传感器分布方案

积分重构模型具有良好的拓扑性能。在实际工程中，往往将复杂梁类结构等效为基础梁单元，并根据矩阵拼接等形式实现整场变形重构。由此可见，研究基础梁单元传感器分布方案具有重要意义。如图 7 所示，以末端集中载荷及均部载荷作用下的典型梁单元为例。

依据 Timoshenko 梁静力学平衡方程，可建立数值截面应变与外载荷的本构关系[14]。为准确表征外载荷与中性轴应变间的关系，式(22)可被写成以下形式：

$$
\boldsymbol{\varepsilon}^* = \boldsymbol{TR} \times \boldsymbol{SE} \tag{23}
$$

其中，$\boldsymbol{TR}$ 为转换矩阵，仅与传感器粘贴位置及截面应变分布形式有关，$\boldsymbol{SE}$ 作为中性轴应变场分布矩阵，具体形式与数值截面应变阶次相关。若梁单元承受末端集中载荷，数值截面应变 $e_i(i=1,4,5,6)$ 为常数，$e_i(i=2,3)$ 为线性函数，$\boldsymbol{SE}$ 具体表达式如下：

$$
\boldsymbol{SE} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & k_1x & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & k_2x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}
= \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{C} \tag{24}
$$

若梁单元承受均部载荷，数值截面应变 $e_i(i=1,6)$ 为常数，$e_i(i=4,5)$ 为线性函数，$e_i(i=2,3)$ 为二次函数，此时 $\boldsymbol{SE}$ 表达式如下：

$$
\boldsymbol{SE} = \begin{Bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & x^2 & x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & x & x & 1 & 0 \\
0 & 2k_1x & k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2k_2x & k_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{Bmatrix}
\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{Bmatrix}
\tag{25}
$$

根据数值应变间依存关系，引入常系数 k_1、k_2 可进一步缩减参数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的变量数。

$$
k_1 = \frac{G_z}{D_y} \quad k_2 = \frac{G_y}{D_z} \tag{26}
$$

其中，G 与 D 分别表示抗剪刚度及抗弯刚度。因此，测量截面应变 $\boldsymbol{SE}$ 可表示为：

$$
\boldsymbol{SE} = \boldsymbol{P}(x_i)(\boldsymbol{TR} \times \boldsymbol{P}(x_i))^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^*(x,c,\beta) \tag{27}
$$

由上述分析可知，梁单元在集中载荷或均部载荷作用下应变矩阵 $\boldsymbol{SE}$ 中分别含有 6 个或 8 个变量，因此至少需要在梁单元上安装 6 个或 8 个应变传感器方可实现单元变形重构。

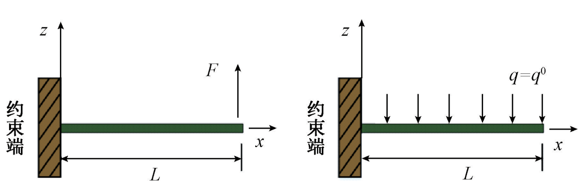


图 7　典型平面载荷分布形式

Fig. 7　Typical plane load distribution

2.2　传感器优化准则

利用光纤光栅传感器测量结构表面应变时，由于安装误差，环境干扰等不利因素，测量结果极易出现偏差。考虑测量应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ 作为积分重构模型唯一输入量，因此可靠合理的传感器分布方案是保证该算法实现的前提。由式(14)及(27)可获得节点自由度与表面应变间关系：

$$
\boldsymbol{U} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\varepsilon}^* \tag{28}
$$

其中，$\boldsymbol{S}$ 为逆类刚度矩阵、类载荷向量形函数、广义

应变转换矩阵 3 部分的乘积，ε^* 为实测表面应变。系统干扰（$\Delta\varepsilon$）带来的结构重构误差可表示为：

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\varepsilon}^* + \boldsymbol{S}\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \tag{29}$$

当误差产生时，若矩阵 $\boldsymbol{S}$ 表现为良态，则其抵抗误差能力较强，由此求解的自由度误差也较小，这种抵抗误差的能力被称之为鲁棒性，可利用指标条件数进行表征：

$$cond(\boldsymbol{S}) \equiv \|\boldsymbol{S}^{-1}\| \times \|\boldsymbol{S}\| \tag{30}$$

因此为保障重构算法的稳定性及可靠性，本文采用自适应多目标粒子群优化算法，以重构精度和鲁棒性作为评估指标，寻找最优传感器布局方案。在单元积分重构模型中，应变传感器实际粘贴位置是自适应多目标粒子群优化算法中唯一决策变量，其可行域为被测对象表面几何轮廓坐标。在执行优化算法前，需利用三维软件对模型进行预处理，从而提前确定变量可行域。考虑传统表征函数需要满足矩阵 $\boldsymbol{S}$ 可逆，这对于需要进行多次循环迭代的优化求解模型是不适用的。因此，本文选用文献[20]提出的评估方法重新表征鲁棒性，具体评判标准为：

$$\cos(\theta_i(D)) = \frac{\{\boldsymbol{S}_i(D)\} \times [\boldsymbol{P}_i(D)] \times \{\boldsymbol{S}_i(D)\}^{\mathrm{T}}}{\|\{\boldsymbol{S}_i(D)\}\| \times \|\{[\boldsymbol{P}_i(D)] \times \{\boldsymbol{S}_i(D)\}^{\mathrm{T}}\}\|} \tag{31}$$

其中，$\boldsymbol{P}_i(D)$ 具体表达式为：

$$\boldsymbol{P}_i(D) = \bar{\boldsymbol{S}}_i(D)(\bar{\boldsymbol{S}}_i(D)^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{S}}_i(D))^{-1}\bar{\boldsymbol{S}}_i(D)^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

式中：$\boldsymbol{S}_i$ 表示矩阵 $\boldsymbol{S}$ 第 i 行向量，D 表示传感器可行域，即应变传感器可粘贴位置，$\bar{\boldsymbol{S}}_i$ 表示去除选定 $\boldsymbol{S}_i$ 后新组成的矩阵，D 表示选定的 $\boldsymbol{S}_i$ 行与新矩阵 $\bar{\boldsymbol{S}}_i$ 间的夹角，文献[20]指出所形成的夹角值越小，重构矩阵对微小误差的抵抗性越强。因此，基于鲁棒性的优化目标函数可写成：

$$\begin{cases} \min \quad f(D) = -\max\{\theta_i(D)\} \\ \mathrm{s.t.} \quad D \in [j_1, j_2, \cdots, j_n] \end{cases} \tag{33}$$

在满足重构稳定性的前提下，最大程度提高重构精度是保障算法核心竞争力的重要手段。因此本文利用相对均方根误差（relative root mean square error, RRMSE）作为精度优化目标函数：

$$RRMSE = \frac{RMSE}{\max(disp)} \times 100\% \tag{34}$$

其中，$RMSE$ 为均方根误差，具体表达式如下：

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(disp^F - disp^P)^2} \tag{35}$$

式中：$disp^F$ 为算法重构值，$disp^P$ 表示第三方测量或仿真软件提取值。因此，基于重构精度的优化目标函数可表示为：

$$\begin{cases} \min \quad g(D) = RRMSE(D) \\ \mathrm{s.t.} \quad D \in [j_1, j_2, \cdots, j_n] \end{cases} \tag{36}$$

相较于单目标优化模型，多目标优化问题无法直接获得最优解，需要考虑各目标间相互影响。因此本文提出的自适应粒子群算法通过引入初始化策略、自适应惯性权重策略、粒子选择策略和 ECS 设置维护策略获得重构模型非劣解集，即帕累托前沿。根据被测对象实际工程背景，人为加入扰动函数校核帕累托前沿点，在非劣解集中确定一组最优传感器布局方案，具体求解思路如图 8 所示。

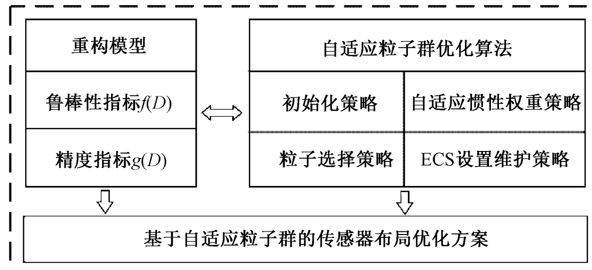


图 8　应变传感器优化准则

Fig. 8　Optimization criteria for strain sensors

考虑本文侧重于描述积分重构模型及基于新模型建立的优化目标函数，而自适应多目标粒子群优化算法作为典型重构算法，其优化参数设置及算法流程已在之前工作中详细介绍[21]，本节将不再进行赘述。

3　实验结果与分析

3.1　仿真分析

为验证本文提出的积分重构模型及传感器优化准则能有效解决传统重构方案的奇异性，详细的仿真分析将被进行。

首先，在有限元仿真软件 Abaqus 中建立翼型梁模型。根据机翼结构特点，机翼可以分为翼根、副翼和翼尖 3 部分，各部分基本尺寸如图 9 所示。其中翼根及副翼截面为非轴对称结构，外力不经过结构剪切中心。机翼外表面蒙皮层总厚度为 $t = 45$ mm，各层厚度、材料属性以及各层材料由外到内的堆积顺序如表 1 所示。其中，玻璃纤维层和碳纤维板层与发泡层通过约束模块连接。机翼骨架由固体单元（C3D8R）构建，外部蒙皮由壳单元（SR4R）构建。为了确定仿真计算的准确结果，将整个机翼模型划分成 12 830 个单元。

考虑机翼在爬升、巡航和降落过程中，主要承受空气动力作用，在有限元分析时，可对机翼施加集中载荷（$F_z = 600$ N）及均布载荷（$q_z = 0.05$ MPa）。同时，为准确描述中性轴应变分布情况，可通过建立的有限元模型确定应变参数。

机翼轮毂截面坐标（y，z）可表示为：

$$c = \int \sqrt{1 + (d')^2}\,\mathrm{d}y \tag{37}$$

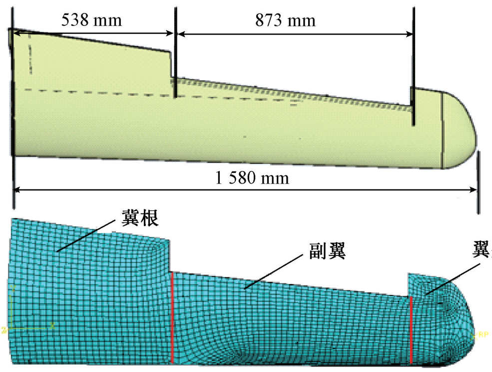


图 9　机翼有限元模型

Fig. 9　Finite element model of wing

表 1　机翼蒙皮材料参数

Table 1　Material parameters of wing skin

各层材料	厚度/mm	杨氏模量/GPa	泊松比	剪切模量/GPa
碳纤维	$H^{(1)}=2.50$	$E_x=128$	$u_{xy}=0.28$	$G_{xy}=3.19$
		$E_y=9.88$	$u=0$	$G_{xz}=2.65$
		$E_z=9.88$	$u=0$	$G_{yz}=2.65$
发泡层	$H^{(2)}=37.50$	$E=0.09$	$u=0.30$	$G=0.03$
纤维层	$H^{(3)}=2.50$	$E_x=4.70$	$u=0.28$	$G=27.60$
		$E_y=13.20$	$u=0$	$G=3.65$
骨架	$H^{(4)}=2.50$	$E=55.00$	$u=0.30$	$G=22.00$

其中,$d(y)$为机翼截面轮廓函数。由于机翼具有复杂的翼型结构,致使机翼截面函数无法直接获得,通过建立有限元模型获得截面坐标点,并将获得的坐标点进行三阶样条拟合,以拟合精度为评估指标,从而确定最优截面轮廓函数 $d(y)$,并利用 c 为 $d(y)$的一阶方向导数的性质,最终确定函数 c 的表达式,拟合精度如图 10 所示。

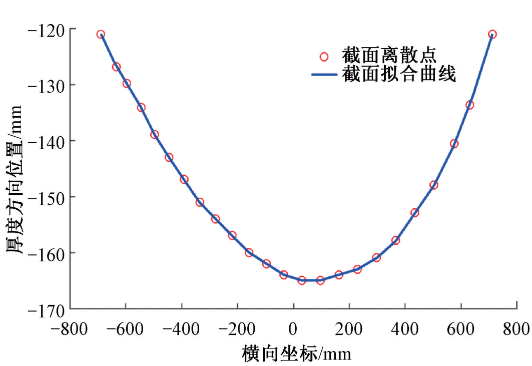


图 10　拟合截面轮廓函数

Fig. 10　The profile function of fitting section

为确定与剪切应变相关的f函数及与材料属性相关的 k 函数,可选用中间截面 $x=870$ mm 的仿真信息进行评估。首先筛选截面最大剪应变,并以此为初始位进行截面应变迭代,通过样条曲线确定f函数。再将提取剪切应变值以及对应的的剪切模量代入式(21)中,分别计算出剪切修正系数 k。

多目标粒子群算法是保障重构精度的关键技术,因此可利用优化模型对应变提取点位置进行优化。根据机翼内部结构确定粒子群可行域,可行域范围为上下蒙皮及机翼内部骨架,并设置初始种群规模 50,迭代次数 200,初始位置与初始速度随机,优化后的传感器详细位置如表 2 所示。

表 2　传感器优化布局方案

Table 2　Sensor layout optimization scheme

序号	集中载荷	均部载荷
ε_1	(465,21.82,-136,0°)	(245.62,27.40,-3.70,0°)
ε_2	(390.30,17,-9.30,0°)	(568.10,-11.20,25.90,45°)
ε_3	(700.90,-15.90,68.50,45°)	(465,21.80,-136,0°)
ε_4	(572,24,-43.80,0°)	(390.30,17,-9.30,0°)
ε_5	(171,23,76.50,0°)	(700.90,-15.90,68.50,45°)
ε_6	(847,7.30,-136,0°)	(572,24,-43.80,0°)
ε_7	—	(171,23,76.50,0°)
ε_8	—	(847,7.30,-136,0°)

根据优化应变值,利用提出的积分重建模型对机翼变形场进行重构,并选择 10 个评估点与仿真结果进行对比,从而检验重构算法准确性及可靠性,结果如图 11 和 12 所示。

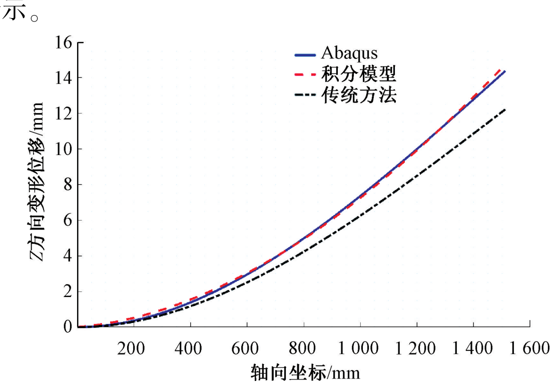


图 11　集中载荷下主变形重构曲线对比

Fig. 11　Comparison of main deformation curves under concentrated load

由实验对比结果可得,利用传统方法进行机翼结构变形重构时,由于无法通过表面应变测量点准确获得中面应变场分布,导致传统方法重构值与 Abaqus 仿真值出现非常明显偏差。该重构误差远超工程可接受范围范围,不具备评估价值。

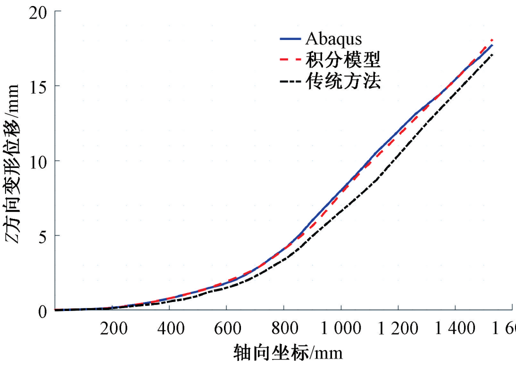


图 12 均布载荷下主变形重构曲线对比

Fig. 12 Comparison of main deformation curves under uniform load

在相对均方根误差 RRMSE 基础上,引入新的评估指标最大误差"ME"其物理意义为"Abaqus"和"积分重构模型"之间的绝对最大变形误差。如表 3 所示,在均部载荷作用下,机翼最大变形为 14.38 mm,最大误差为 0.26 mm,相对均方根误差 RRMSE 仅为 0.21%。同时当均值载荷作用于机翼蒙皮时,由于受蒙皮外部分布影响,位移场仅满足 C^0 连续,在副翼和翼根相交区域,有明显的变化趋势,此时机翼最大变形为 17.74 mm,最大误差为 0.38 mm,相对均方根误差为 0.42%。上述数值分析结果表明,基于多目标粒子群优化算法获得的应变数据,在没有任何扰动情况下积分重构具有可靠的精度,而传统重构方法由于无法克服翼型截面应变场分布复杂带来的病态问题,重构误差不满足工程精度要求,因此本文提出的重构模型是解决复杂翼型结构重构的有效方案。

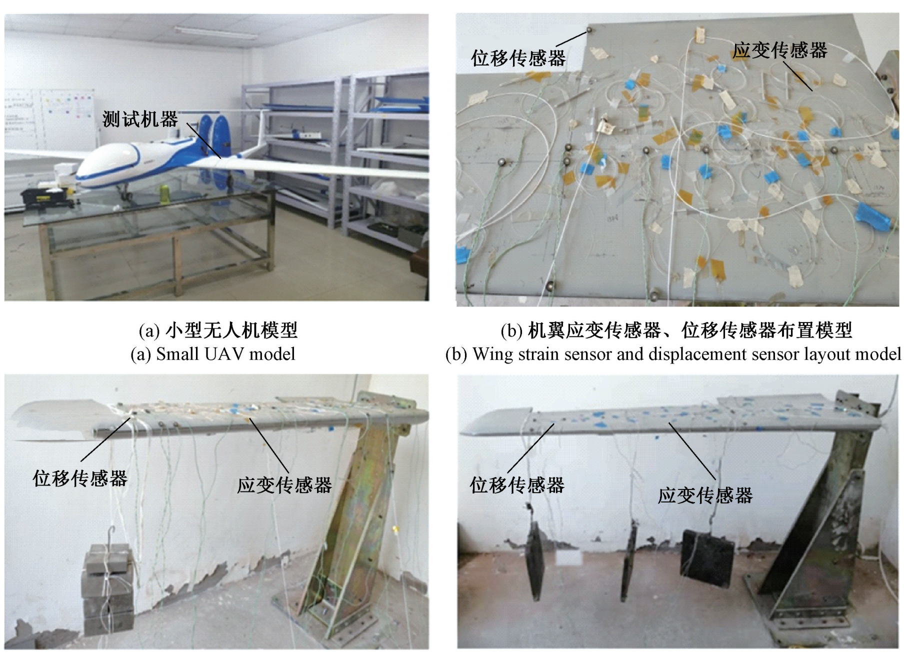
表 3 重建变形与仿真结果在评估点处对比

Table 3 Comparison between reconstruction results and simulation results at the evaluation points

评估坐标(集中)	120	280	470	700
Abaqus/mm	0.14	0.57	1.75	3.51
积分重构模型	0.27	0.74	1.90	3.60
评估坐标(集中)	850	1 000	1 250	1 530
Abaqus/mm	5.01	6.43	9.97	14.38
积分重构模型	5.10	6.38	9.782	14.74
评估坐标(均布)	120	280	470	700
Abaqus/mm	0.07	0.35	1.11	2.75
积分重构模型	0.06	0.34	1.11	2.68
评估坐标(均布)	850	1 000	1 250	1 530
Abaqus/mm	4.92	8.00	13.11	17.74
积分重构模型	4.71	7.69	12.84	18.12

3.2 实验验证

为评估积分重构模型形在实际工程中的可靠性,本节在结构设计实验室搭建一个与数值例子相同的测试平台,该模型具有与有限元模型相同的尺寸和材料性能,且整个测试平台如图 13 所示。为满足悬臂约束,翼根处通过 6 根螺柱与固定端贴合。



(a) 小型无人机模型
(a) Small UAV model

(b) 机翼应变传感器、位移传感器布置模型
(b) Wing strain sensor and displacement sensor layout model

(c) 悬臂状态下机模承受集中载荷
(c) Model bearing concentrated load under cantilever state

(d) 悬臂状态下机模承受均部载荷
(d) Model bearing distributed load under cantilever state

图 13 实验装置

Fig. 13 Experimental setup

机翼结构受载发生变形时,与之共型的光纤光栅传感器随着发生变形,此时通过光纤解调系统(精度 3 pm,刷新率 100 Hz)即可解算此处表面应变值。如图 14 所示,第 3 方变形位移测量利用加拿大数码有限公司生产的 6 维动态追踪系统(NDI,测量精度为 0.1 mm),通过在机翼表面上安装 mark 点即可实现结构变形检测,其测量数据被作为重构评估值。

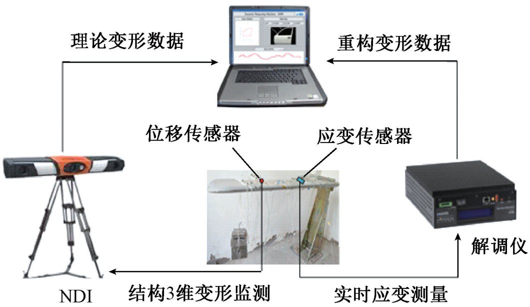


图 14　结构变形重构验证框架

Fig. 14　The verification framework of structural deformation reconstruction

在机翼模型变形实验中,本文提出的重构算法在两种典型载荷下都具有可靠的重构精度,如图 15、16 所示。如表 4 所示,积分重构模型在集中载荷作用下,MD 为 0.731 mm,RMSE 为 0.485 mm,RRMSE 为 3.37%,其中误差主要产生于翼根截面处,该区域附近截面材料尺寸会发生明显跳跃式变化。积分重构模型在均部载荷作用下,此时 MD 为 1.43 mm,RMSE 为 0.782 mm,RRMSE 为 3.97%,虽然积分重构模型在均部载荷下的 RRMSE 比集中载荷作用时高,但重构曲线趋势与 NDI 测量曲线更加贴近。同时考虑传统重构方法在理想地仿真测试中仍无法实现机翼重构,实验部分将不对其进行展开描述。

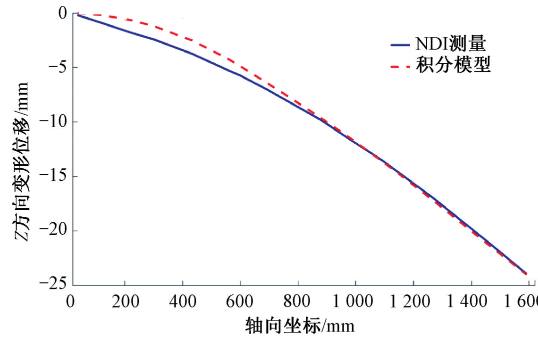


图 15　集中载荷下主变形重构曲线对比

Fig. 15　Comparison of main deformation curves under concentrated load

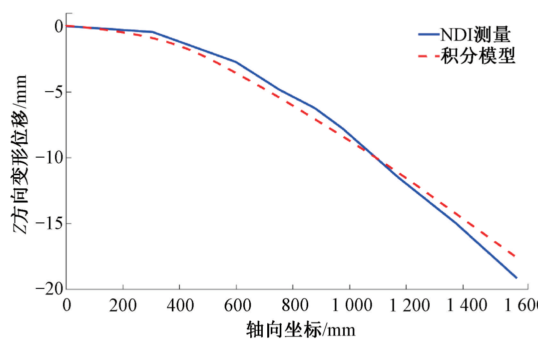


图 16　均布载荷下主变形重构曲线对比

Fig. 16　Comparison of main deformation curves under uniform load

表 4　外载荷重构精度分析

Table 4　Reconstruction accuracy of external loads

评估点及误差种类		1	2	3	4	5	6	7	MD	RMSE	RRMSE/%
集中载荷	NDI	−0.56	−1.45	−2.25	−5.88	−9.03	−11.87	−14.68	0.73	0.48	3.17
	积分模型	−0.11	−0.75	−1.52	−5.62	−9.42	−11.54	−14.37			
均部载荷	NDI	−0.12	−0.44	−2.724	−6.54	−9.62	−14.31	−18.25	1.43	0.67	3.47
	积分模型	−0.13	−0.78	−3.33	−7.02	−9.35	−14.86	−19.68			

通过上述仿真分析与实验验证,证明本文提出的非奇异重构模型在实际工程中具有可靠的精度,即使对于机翼等此类复杂结构,也可通过少量离散应变传感器实现结构整场变形场重构。

4　结　　论

本文提出了一种适用于复杂工程结构的非奇异变形感知方法,通过仿真分析与实验测试验证该方法在机翼结构实时变形过程中的预测能力。

1)理论分析了传统重构模型病态性的产生机理,推导了理论截面应变与实测截面应变间的最小二乘泛函关系,指出利用离散积分法可以有效消除评估截面数量、位置选取不当对重构模型产生的影响。

2)区别于一般的轴对称型截面,翼型结构剪切应变不过轴心,传统应变转换矩阵将无法准确描述中性轴应

变。根据广义应变转化矩阵及机翼有限元分析可知,采用样条曲线准确拟合截面轴向应变函数是实现结构变形重构的必要因素。

3)依据小型无人机翼的仿真与实验数据验证了重构模型及多目标粒子群优化算法在结构变形感知中的适用性。该方法对于发展、应用主动调节能力的智能结构系统,具有重要的指导意义。

参考文献

[1] 马松辉,芦永超,刘可佳,等. 基于小型无人机的高精度天线测试方法研究[J]. 仪器仪表学报, 2019, 40(5):36-42.

MA S H, LU Y CH, LIU K J, et al. Accurate antenna measurement method based on micro UAV[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019, 40(5):36-42.

[2] ZHOU J Z, CAI Z H, KANG L. Deformation sensing and electrical compensation of smart skin antenna structure with optimal fiber Bragg grating strain sensor placements[J]. Composite Structures, 2018, 211(1): 418-432.

[3] 陶孟卫,姚宇威,元海文,等. 无人机自主降落视觉标识设计及位姿测量方法[J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(5):155-164.

TAO M W, YAO Y W, YUAN H W, et al. Visual target design and pose measurement method for UAV autonomous landing[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(5):155-164.

[4] 刘瑾,张鹏程,程绍伟,等. 基于双 PSD 视觉的空间光点位置测量研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(1):81-88.

LIU J, ZHANG P CH, CHENG SH W, et al. Research on spatial spot position measurement based on dual PSD vision [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022, 36(1):81-88.

[5] DING G P, YUE S Y, ZHANG S C, et al. Strain-deformation reconstruction of CFRP laminates based on KO displacement theory [J]. Nondestructive Testing and Evaluation, 2021, 36(2):125-137.

[6] DING G P, YUE S Y, ZHANG S C. Strain deformation reconstruction of CFRP laminates based on Ko displacement theory [J]. Nondestructive Testing and Evaluation, 2020, 5:1-13.

[7] FRANZISKA E, JOACHIM B. Application of the modal approach for prediction of forced response amplitudes for fan blades[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2019, 141(3):1-10.

[8] 徐伟,曹玉岩,郝亮,等. 复合材料机翼试验-数值建模方法及气弹分析[J]. 仪器仪表学报, 2019, 40(10): 237-246.

XU W, CAO Y Y, HAO L, et al. Combined experiment and numerical modeling approach for the composite material wing and aeroelastic analysis [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019, 40(10):237-246.

[9] CHEN K Y, HE D H, BAO H, et al. A unified full-field deformation measurement method for beam-like structure[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2022, 71:1-10.

[10] NIU S T, GUO Y H, BAO H. A triangular inverse element coupling mixed interpolation of tensorial components technique for shape sensing of plate structure[J]. Measurement, 2022, 202:1-13.

[11] CUI P, ZHANG W T, WANG Z G. Measurement of aircraft wing deformation using fiber bragg gratings[C]. 2017 16th International Conference on Optical Communications and Networks (ICOCN), IEEE, 2017: 1-3.

[12] LIVELY P S, ATALLA M J, HAGOOD N W. Investigation of filtering techniques applied to the dynamic shape estimation problem[J]. Smart Mater, Struct, 2007, 10:264-272.

[13] ROY R, GHERLONE M, SURACE C. A shape sensing methodology for beams with generic cross sections: Application to airfoil beams[J]. Aerospace Science and Technology, 2021, 110:1-10.

[14] GHERLONE M, CERRACCHIO P, MATTONE M. Shape sensing of 3D frame structures using an inverse finite element method[J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49:3100-3112.

[15] ZHAO F F, BAO H, LIU J F, et al. Shape sensing of multilayered composite and sandwich beams based on refined zigzag theory and inverse finite element method[J]. Composite Structures, 2021, 261: 3321-3332.

[16] KEFAL A, OTERKUS E, TESSLER A. A quadrilateral inverse-shell element with drilling degrees of freedom for shape sensing and structural health monitoring [J]. Engineering Science and Technology, 2016, 19(3): 1299-1311.

[17] KEFAL A. An efficient curved inverse-shell element for shape sensing and structural health monitoring of cylindrical marine structures[J]. Ocean Engineering, 2019(188): 6262-6275.

[18] LIU M Y, ZHANG X, SONG H, et al. Inverse finite element method for reconstruction of deformation in the gantry structure of heavy-duty machine tool using FBG sensors[J]. Sensors,2018,18(7):92-102.

[19] TESSLER A, DONG S B. On a hierarchy of conforming timoshenko beam elements[J]. Computers & Structures, 1981,14(3-4): 335-344.

[20] JOSHUA H G,SHIN J C,BOUWENSE M A. Minimum condition number by orthogonal projection rows election of artificial boundary conditions for finite element model update and damage detection[J]. Journal of Sound and Vibration,2018,433(27):179-197.

[21] LI X H, NIU S T, BAO H, et al. Improved adaptive multi-objective particle swarm optimization of sensor layout for shape sensing with inverse finite element method[J]. Sensors, 2022, 22(14): 5023-5203.

作者简介

陈康宇,2020 年于兰州交通大学获得学士学位,现为西安电子科技大学博士研究生,主要研究方向为结构形状感知与健康检测。

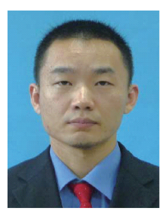
E-mail: ky.chen@stu.xidian.edu.cn

Chen Kangyu received his B.Sc. degree from Lanzhou Jiaotong University in 2020. He is currently a Ph.D. candidate at Xidian University. His main research interests include structure shape sensing, and health monitoring.

保宏(通信作者),1995 年于杭州电子科技大学获得学士学位,2002 年于西安电子科技大学获得硕士学位,2005 年于西安电子科技大学获得博士学位,现为西安电子科技大学教授,主要研究方向为雷达天线结构变形测量、机电系统故障诊断。

E-mail: hbao@xidian.edu.cn

Bao Hong (Corresponding author) received his B.Sc. degree from Hangzhou Dianzi University in 1995, received his M.Sc. degree from Xidian University in 2002, and received his Ph.D. degree from Xidian University in 2005. He is currently a professor at Xidian University. His main research interests include radar and antenna deformation measurement, and fault diagnosis of electromechanical system.



冷国俊,2005 年于兰州理工大学获得学士学位,2012 年于西安电子科技大学获得博士学位,现为中国电子科技集团公司第二十九研究所正高职称,主要研究方向为电子装备场路耦合。

E-mail: guojun.leng@gmail.com

Leng Guojun received his B.Sc. degree from Lanzhou University of Technology in 2005, and received his Ph.D. degree from Xidian University in 2012. He is currently a senior engineer at Southwest China Research Institute of Electronic Equipment. His main research interests include field road coupling of electronic equipment.