

DOI: 10.13382/j.jemi.B2307140

# 融合小波框架和低秩的动态磁共振图像重建新思路\*

刘金华<sup>1</sup> 吴佳韵<sup>1</sup> 饶云波<sup>2</sup> 李永明<sup>3</sup> 俞智慧<sup>3</sup>

(1. 上饶师范学院数字技术应用产业学院 上饶 334001; 2. 电子科技大学信息与软件工程学院 成都 610054;

3. 上饶师范学院数学与计算科学学院 上饶 334001)

**摘要:**动态磁共振成像(dynamic magnetic resonance imaging, DMRI)是一种通过连续扫描图像获取其随时间和空间变化的影像技术,将压缩感知技术应用于动态磁共振成像,容易导致磁共振图像重建后的视觉质量不够理想。因此,针对压缩感知在DMRI重建上存在的不足,通过 $\ell_1$ 范数以刻画磁共振图像数据的稀疏性,以及利用低秩描述动态磁共振图像序列的内在相关性,提出了一种基于低秩和稀疏分解的重建模型,有效减少了动态磁共振成像的伪影。在建模阶段,将稀疏成分应用 $\ell_1$ 范数进行建模,对低秩成分利用核范数进行建模。在模型优化求解阶段,引入小波框架正则化方法,将重建模型转化为非光滑凸优化问题,然后使用基于动量加速的近似点优化梯度方法求解该问题。最后,通过在心脏电影、心脏灌注和phantom体膜影像数据上进行实验,验证了所提模型的有效性。结果表明,所提方法在采样率30%时,平均峰值信噪比达到33.709 0 dB,平均结构相似度达到0.966 0,进一步提升了磁共振图像重建的精度。

**关键词:**动态磁共振成像;低秩;小波框架;近似点优化梯度方法;压缩感知

**中图分类号:** TP391.41

**文献标识码:** A

**国家标准学科分类代码:** 510.40

## New method for dynamic magnetic resonance image reconstruction combining wavelet frame and low-rank

Liu Jinhua<sup>1</sup> Wu Jiayun<sup>1</sup> Rao Yunbo<sup>2</sup> Li Yongming<sup>3</sup> Yu Zhihui<sup>3</sup>

(1. School of Digital Technology Industry, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China; 2. School of Information and Software Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China; 3. School of Mathematics and Computational Science, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China)

**Abstract:** Dynamic magnetic resonance imaging (DMRI) is an imaging technology that acquires images through continuous scanning to capture their changes over time and space. Applying compressed sensing technology to DMRI tends to result in unsatisfactory visual quality of the reconstructed magnetic resonance images. Therefore, to address the deficiencies of compressed sensing in DMRI reconstruction, a reconstruction model based on low-rank and sparse decomposition is proposed by using  $\ell_1$  norm to characterize the sparsity of magnetic resonance image data and utilizing low-rank to describe the intrinsic correlation of dynamic magnetic resonance image sequences. This effectively reduces artifacts in dynamic magnetic resonance imaging. In the modeling phase, the sparse component is modeled using the  $\ell_1$  norm, while the low-rank component is modeled using the nuclear norm. In the model optimization phase, a wavelet framework regularization method is introduced, and the reconstruction model is transformed into a non-smooth convex optimization problem, which is then solved by using a momentum-accelerated proximal gradient method. Finally, experiments are conducted on cardiac cine, cardiac perfusion, and phantom membrane image data to verify the effectiveness of the proposed model. The experimental results show that the average PSNR and the average SSIM of the proposed method reach 33.709 0 dB and 0.966 0 at a sampling ratio of 30%, respectively, which further improves the reconstruction accuracy of the dynamic magnetic resonance image.

**Keywords:** dynamic magnetic resonance imaging (DMRI); low-rank; wavelet frame; proximal optimized gradient method; compressive sensing

收稿日期: 2023-12-18 Received Date: 2023-12-18

\* 基金项目: 国家自然科学基金(12161075)、江西省教育厅科技项目(GJJ2201801)资助

## 0 引言

磁共振成像(magnetic resonance imaging, MRI)采用一种非侵入式的成像模式,能够有效地反映人体的生理信息和分子生物信息特征。MRI 与超声成像、计算机断层扫描、正电子发射断层成像等成像模式相比,其独有的优势是无电离辐射、无需放射性示踪剂以及高软组织对比度等。但是 MRI 也存在一些缺陷,如扫描速度慢、成像质量不佳等。其主要原因是一方面扫描速度的缓慢影响了成像的视觉感知质量,导致磁共振图像中容易出现混叠伪影、噪声等,这样将使得医生难以作出准确的疾病诊断;另一方面,由于成像扫描的时间过长,对病人提出了较高的要求,同时也增加了病人的不适感。因此,快速高质量的图像重建成为磁共振成像研究领域的一个关键问题<sup>[1-3]</sup>。

奈奎斯特(Nyquist)采样定理指出一个信号如果是带限的,只要采样频率高于信号中最高频率的两倍,就可以从采样后的离散信号中重建出原始连续信号。这里的“两倍最高频率”就被称为奈奎斯特频率。因此,奈奎斯特频率是理论上最小的采样频率,以确保在采样过程中不会丢失任何原始信号的信息。为了突破奈奎斯特频率的瓶颈,近年来,压缩感知<sup>[4-5]</sup>利用了信号在某个变换或字典(Dictionary)下的稀疏性这一前提条件,对信号实现了在远低于奈奎斯特频率的采样,然后从这些观测样本中运用稀疏重建方法恢复原始信号。借助于压缩感知,Lustig 等<sup>[6]</sup>将其应用到磁共振成像中,通过降低 K 空间的采样点数来加速成像,然后使用压缩感知技术重建图像。将压缩感知应用于磁共振成像的关键是对 K 空间进行欠采样处理,通过减少采集样本的数量以达到缩短扫描时间的目的。但是,压缩感知技术仅仅利用了图像数据的稀疏性,忽略了动态磁共振图像数据的低秩性<sup>[7]</sup>。

为了利用动态磁共振图像序列的空间-时间稀疏性,基于时空稀疏性的动态磁共振图像重建方法被提出。文献[8]直接从整个 K 空间数据中同时估计时间基函数和空间系数,提出了  $k$ - $t$ -SLR(sparsity and low-rank, SLR)方法。该方法能同时约束动态信号的低秩和稀疏先验。然而,动态磁共振图像序列的运动变化可认为是一种非刚性运动,其随着时间变化的低秩性可能无法得到保证,容易导致重建图像出现时空模糊现象。为了缓解这一问题,文献[9]提出了类似鲁棒主成分分析的动态重建算法。进一步,文献[10]提出了一种低秩与总变分结合的动态磁共振图像重建模型,最后利用原始-对偶方法对重建模型进行了优化求解。文献[11-12]对近似点一阶优化方法进行了分析,指出优化梯度方法(optimized gradient method, OGM)能够实现磁共振图像的加速重建。

为此,文献[13]在 OGM 的基础上进行了扩展,提出了一种动态磁共振成像的并行重建算法,该算法将重建模型转化为非光滑凸问题,并应用近似点优化梯度法和变量分裂法进行求解,取得了较好的重建效果。

一般来说,动态磁共振图像中帧与帧数据间存在着较强的相关性,可以将图像帧中相对不变的部分看成静态背景,而变化的部分看成是动态前景,类似于视频背景的分隔过程。因此,动态磁共振图像可利用低秩加稀疏的分解模型进行重建。该分解模型主要是将图像分解为低秩成分和稀疏成分,然后对这两个成分分别进行重建,最后组合成重构图像。另外,动态磁共振图像重建基于多个线圈接收器采集数据,虽然加快了成像速度。但在实际中,受设备数量限制的影响,线圈的数量需要进行控制。此外,在成像中,多个线圈之间也可能存在一定的相互干扰。因此,如何提高动态磁共振图像重建的精度是一个关键问题。

在重建精度方面,图像质量主要受两个因素的影响。其中一个是对感兴趣信号的稀疏性或者在某种变换下的稀疏性,另一个因素是采样矩阵的约束等距性常数。在实际应用中,重建模型最终需要求解一个非凸优化问题,但非凸优化问题的求解较为复杂。为了简单起见,一般将非凸优化问题转化为凸优化问题进行求解,在此过程中,需要结合图像的先验背景。因此,在保证重建效率的基础上,充分挖掘 MRI 序列中更多的先验信息和结构信息,进一步提升动态磁共振图像重建的质量,还存在很大的提升空间。

为了平衡动态磁共振图像重建的质量和重建效率,本文拟基于低秩和稀疏分解模型对图像进行重建,将稀疏成分应用基于  $\ell_1$  范数的小波框架正则化进行稀疏建模,对低秩成分利用核范数进行建模,最后将重建模型转化为非光滑凸优化问题。在模型计算中,借鉴快速迭代阈值收缩算法(fast iterative shrinkage thresholding algorithm, FISTA)的思想,结合改进的近似点优化梯度算法(proximal optimized gradient method, POGM)进行求解。

## 1 基于小波框架的图像重建

一般而言,正交小波或复小波都可以稀疏逼近图像的局部特征<sup>[14]</sup>。相比之下,小波框架在图像的稀疏逼近方面更具优势,其原因是它们的小波函数集合有多阶的消失矩和较短的支撑<sup>[15]</sup>。其中消失矩阶数的多样性将使得小波框架具有对不同奇点进行稀疏逼近的子系统,短支撑使得图像经小波框架变换后的系数更加集中。另外一个优势是小波框架对噪声较为鲁棒,主要在于小波框架系统的冗余性。因此,本文应用基于  $\ell_1$  范数的小波框架正则方法对磁共振图像进行稀疏表示。

设在奈奎斯特采样率下采样的  $K$  空间数据为全采样数据,基于压缩感知的磁共振图像重建可以看成是对全采样  $K$  空间数据进行欠采样,其可表示为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}$  表示磁共振图像,  $\mathbf{A}^{M \times N}$  ( $M < N$ ) 表示采样矩阵,  $\mathbf{y}$  表示采样得到的  $K$  空间数据,  $\boldsymbol{\eta}$  表示噪声。然后基于图像在某个变换下的稀疏性,将式(1)转化为一个凸优化问题进行求解,最终恢复出高质量的图像。具体过程为:设磁共振图像  $\mathbf{x}$  在小波框架  $\mathbf{W}^{N_x \times N_y}$  下的表示是稀疏的,即  $\mathbf{x} = \mathbf{W}\boldsymbol{\alpha}$ , 且  $\|\boldsymbol{\alpha}\|_0 \ll L$ 。然后定义一个新的采样矩阵  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{W}$ , 通过求解如下综合型重建模型:

$$\begin{aligned} \min \|\boldsymbol{\alpha}\|_1 \\ \text{s. t. } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{W}\boldsymbol{\alpha}\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (2)$$

得到系数  $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ , 最后经过  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}\hat{\boldsymbol{\alpha}}$  即可获得重建的磁共振图像。分解型重建模型为:

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{W}^H \boldsymbol{\alpha}\|_1 \\ \text{s. t. } \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{W}^H$  表一个分解算子(矩阵),  $H$  表示 Hermitian 转置。综合型重建模型式(2)和分解型重建模型式(3)均将  $\ell_1$  范数作为正则项约束。

小波框架下的重建模型基于向量稀疏  $\ell_1$  进行正则化建模,正如前面所述,利用  $\ell_1$  范数的向量正则化重建模型存在一定的偏差。同时,该类模型忽略了动态磁共振图像帧与帧之间的相关性,没有利用图像的内在低秩结构特性。因此,本文拟结合低秩和小波框架研究动态磁共振图像的重建,进一步提升图像的重建性能。

## 2 提出的磁共振图像重建算法

通过以上分析,结合动态磁共振数据间的低秩特性和图像的稀疏性提出了一种重建模型。该模型应用低秩建模描述了动态磁共振图像数据间的相关性,并基于小波框架来刻画图像系数的稀疏性。最后采用改进的临近点梯度优化方法对重建模型进行求解。

### 2.1 图像重建模型

基于低秩和小波框架的动态磁共振图像重建模型的具体过程是,利用核范数进行低秩正则化以及利用  $\ell_1$  范数进行稀疏正则化。重建模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{L}, \mathbf{S}} \frac{1}{2} \|\mathbf{E}(\mathbf{L} + \mathbf{S}) - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda_L \|\mathbf{L}\|_* + \lambda_S \|\mathbf{WS}\|_1 \\ \text{s. t. } \mathbf{X} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\|\cdot\|_*$  表示核范数,  $\|\cdot\|_0$  表示零范数,即向量中非零元素的个数。在多线圈的动态 MRI 图像重建中,  $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^{N_x N_y}$  是欠采样多线圈  $k-t$  数据,  $N_x$  表示每个

线圈接收的样本总数,  $N_c$  表示线圈个数;  $\mathbf{E}: \mathbb{C}^{N_x N_y \times N_x N_y} \rightarrow \mathbb{C}^{N_x N_y}$  为 MRI 编码算子,而  $\mathbf{L}, \mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N_x N_y \times N_x N_y}$  分别是低秩成分和稀疏成分,  $N_x \times N_y$  表示每一帧图像的大小,  $N_t$  表示时间帧;  $\lambda_L$  和  $\lambda_S$  为正则化参数;  $\mathbf{W}: \mathbb{C}^{N_x N_y \times N_x N_y} \rightarrow \mathbb{C}^{N_x N_y \times N_x N_y}$  表示小波框架,  $\mathbf{WS}$  表示对稀疏成分  $\mathbf{S}$  进行小波变换,具体为  $\mathbf{WS} = (\mathbf{W} \otimes \mathbf{I}_{N_x N_y}) \text{vec}(\mathbf{S})$ , 其中  $\mathbf{W}$  是  $N_x \times N_y$  小波变换矩阵。

针对重建模型式(4),近似点梯度法是常用的优化求解方法,该方法求解的主要过程是将目标函数分解为可微函数和不可微函数的凸优化问题。该算法能充分利用光滑部分的信息,在迭代过程中保证解的结构,进而能够达到和求解光滑问题的梯度算法相近的收敛速度。其本质是对光滑部分做显式梯度下降,对非光滑部分做隐式梯度下降。具体令  $\boldsymbol{\chi} = [\mathbf{L}, \mathbf{S}]^T$ , 重建模型式(4)可以等价为:

$$\min_{\boldsymbol{\chi}} f(\boldsymbol{\chi}) + g_1(\boldsymbol{\chi}) + g_2(\boldsymbol{\chi}) \quad (5)$$

其中:

$$f(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{2} \|\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\chi} - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (6)$$

$$g_1(\boldsymbol{\chi}) = \lambda_L \|\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\chi}\|_*, g_2(\boldsymbol{\chi}) = \lambda_S \|\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \boldsymbol{\chi}\|_* \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{0}$  分别代表着大小为  $N_x N_y \times N_x N_y$  单位矩阵和零矩阵。 $f(x)$  是光滑凸函数且是连续可微的,其梯度是 Lipschitz 常数  $\ell(\nabla f)$ ;  $g_1(\boldsymbol{\chi}), g_2(\boldsymbol{\chi})$  是非光滑连续凸函数。在近似点梯度法中,邻近算子定义为:

$$\text{prox}_g(z) = \text{argmin}_y g(y) + \frac{1}{2} \|y - z\|_2^2 \quad (8)$$

在近似点梯度下降中,基于近似点函数的定义,第  $k$  次的迭代公式为:

$$y_k = \text{prox}_g(y_{k-1} - t \nabla f(y_{k-1})) \quad (9)$$

其中,  $t$  表示步长,其值与 Lipschitz 常数有关。在全采样情况下  $\|\mathbf{E}\|_2^2 = 1$ , 所以式(5)中函数  $f(\cdot)$  的 Lipschitz 常数满足:

$$\ell(\nabla f) = \|\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix}\|_2^2 = 2 \|\mathbf{E}\|_2^2 \leq 2 \quad (10)$$

重建模型式(4)中稀疏成分  $\mathbf{S}$  的更新与  $\ell_1$  范数有关,其最小化问题可以用软阈值算法(iterative shrinkage thresholding algorithm, ISTA)解决。 $g_2$  的近似点映射由软阈值算子定义为:

$$\mathbf{A}_\lambda(y) = \text{sign}(y) \odot (|y| - \lambda)_+ \quad (11)$$

$$(|y| - \lambda)_+ = \begin{cases} |y| - \lambda, & |y| - \lambda > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

其中,  $\odot$  表示逐元素相乘。式(11)可进一步简化为<sup>[11]</sup>:

$$\mathbf{A}_\lambda(y) = \text{sign}(y) \max\{|y| - \lambda, 0\} \quad (13)$$

模型(4)中低秩成分  $\mathbf{L}$  的更新与核范数有关,其最小

化问题可以用奇异值阈值算法解决。一般情况下,只需要几个最大的奇异值及其对应的左右奇异向量就能表示矩阵中的绝大多数信息。 $g_1$  的近似点映射由奇异值阈值算子定义:

$$\mathbf{SVT}_{\lambda}(y) = \mathbf{U}\mathbf{A}_{\lambda}(\Sigma)V^* \quad (14)$$

在第  $k$  次迭代过程中, $L_k, S_k$  的更新公式如下:

$$L_k = \mathbf{SVT}_{\lambda_L}(L_{k-1} - t\mathbf{b}(\chi_{k-1})) \quad (15)$$

$$S_k = \mathbf{W}^*(\mathbf{A}_{\lambda_S}[\mathbf{W}(S_{k-1} - t\mathbf{b}(\chi_{k-1}))]) \quad (16)$$

式中: $\mathbf{b}(\chi) = \mathbf{E}^*([\mathbf{E} \ \mathbf{E}]\chi - \mathbf{b}) = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}] \nabla f(\chi)$ 。

## 2.2 加速近似点梯度优化方法

对于复合优化问题而言,近似点梯度法的思想其实比较简单,正如前面所述,该方法主要是对光滑部分  $f$  做梯度下降,对非光滑部分  $g$  使用邻近算子。那么加速近似点梯度法是在近似点梯度法的基础上引入了动量的概念,引入动量机制是为了克服近似点梯度法在向最优解方向移动时可能出现的震荡现象,也就是说动量机制能够减轻震荡,从而加快迭代点向最优解的移动。具体来说,加速近似点梯度法 (accelerated proximal gradient, APG) 的数学<sup>[16-17]</sup>描述如下。

设复合优化问题统一描述为  $F(x) = f(x) + g(x)$ , 其中  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  均为凸函数,且  $f$  为梯度  $L$ -利普希茨连续函数,  $g$  为非光滑函数。根据近似点梯度法,在第  $k$  次迭代后,  $F(x)$  的上界可表示为<sup>[16]</sup>:

$$\begin{aligned} \hat{F}(x, x_k) &\triangleq f(x_k) + \nabla f(x_k)^T(x - x_k) + \\ &\frac{1}{2} \|x - x_k\|_2^2 + g(x) \triangleq \\ &\frac{L}{2} \|x - w_k\|_2^2 + g(x) + \\ &\text{terms that do not depend on } x \end{aligned} \quad (17)$$

其中,  $w_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$ 。加速近似点梯度法的关键是在迭代点  $x_k$  引入动量项  $x_k - x_{k-1}$ ,那么新的辅助迭代点  $p_{k+1}$  可表示为:

$$p_{k+1} = x_k + \beta_{k+1}(x_k - x_{k-1}) \quad (18)$$

其中,  $\beta_{k+1} = (t_k - 1)/t_{k+1}, t_{k+1} = (1 + \sqrt{1 + 4t_k^2})/2$ 。 $x_k, p_k, t_k$  的初始值分别为:  $p_1 = x_1 = x_0, x_0 \in \mathbb{R}^n, t_1 = 1$ 。

综上,加速近似点梯度法其实就是用  $p_{k+1}$  代替了当前点  $x_k$ 。相应的,为最小化  $\hat{F}(x, p_{k+1})$ ,第  $k+1$  次的迭代点可表示为:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{g/L}\left(p_{k+1} - \frac{1}{L}\nabla f(p_{k+1})\right) \quad (19)$$

对于加速近似点梯度方法,其收敛速度可达到  $O(1/k^2)$ 。

## 2.3 基于加速近似点梯度优化的求解方案

在复合优化算法中,ISTA 是广泛备受关注的经典方法之一。该算法在每一次迭代中通过一个收缩/软阈值操作来更新变量,具有结构简单、计算复杂度低的特点,其收敛速度达到了  $O(1/k)$ 。为了进一步提升算法的计算速度,本文在 ISTA 基础上,应用 Nesterov 加速思想,在重建模型的优化迭代方案中引入动量项,设计了一种融合低秩和小波框架的加速近似点梯度算法,进一步提高了算法的收敛效率。

迭代求解算法如算法 1 所示。其中在算法中引入数据一致性变量  $\mathbf{D}$ ,以及两个辅助变量  $\tilde{\chi} = [\tilde{L}, \tilde{S}]^T, \bar{\chi} = [\bar{L}, \bar{S}]^T$ 。在算法 1 所述算法中,首先输入欠采样数据  $\mathbf{b}$ ,编码算子  $\mathbf{E}$ ,小波框架  $\mathbf{W}$ ,以及正则化参数  $\lambda_L, \lambda_S$ ,并对其进行初始化。在算法求解步骤 4 中,引入 3 个动量加速项,分别是  $(\tilde{\chi}_k - \tilde{\chi}_{k-1})$ 、 $(\tilde{\chi}_k - \chi_{k-1})$  以及  $(\bar{\chi}_{k-1} - \chi_{k-1})$ 。对低秩成分  $L_k$ 、稀疏成分  $S_k$  以及数据一致项  $D_k$  的更新,分别为步骤 6、7 和 8。经过  $N$  次迭代运算,最后输出重建后的图像  $\chi_N$ 。

算法 1 动态磁共振图像重建模型的加速算法

输入:欠采样数据  $\mathbf{b}$ ,编码算子  $\mathbf{E}$ ,小波框架  $\mathbf{W}$ ,正则化参数  $\lambda_L, \lambda_S$ 。

初始化: $\mathbf{D}_0 = \mathbf{L}_0 = \mathbf{E}^* \mathbf{b}, S_0 = \mathbf{0}$ ;

$$\tilde{\chi}_0 = \bar{\chi}_0 = \chi_0, \theta_0 = \zeta_0 = 1$$

For  $k=1, 2, \dots, N$

$$1. \quad \tilde{L}_k = \mathbf{D}_{k-1} - S_{k-1}$$

$$2. \quad \tilde{S}_k = \mathbf{D}_{k-1} - L_{k-1}$$

$$3. \quad \theta_k = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{1 + 4\theta_{k-1}^2}}{2}, & k < N \\ \frac{1 + \sqrt{1 + 8\theta_{k-1}^2}}{2}, & k = N \end{cases}$$

$$4. \quad \bar{\chi}_k = \tilde{\chi}_k + \frac{\theta_{k-1} - 1}{\theta_k}(\tilde{\chi}_k - \tilde{\chi}_{k-1}) + \frac{\theta_{k-1}}{\theta_k}(\tilde{\chi}_k - \chi_{k-1}) + \frac{\theta_{k-1} - 1}{\zeta_{k-1}\theta_k}t(\bar{\chi}_{k-1} - \chi_{k-1})$$

$$5. \quad \zeta_k = t\left(1 + \frac{\theta_{k-1} - 1}{\theta_k} + \frac{\theta_{k-1}}{\theta_k}\right)$$

$$6. \quad L_k = \mathbf{SVT}_{\lambda_L}(\bar{L}_k)$$

$$7. \quad S_k = \mathbf{W}^*(\mathbf{A}_{\lambda_S}[\mathbf{W}(\bar{S}_k)])$$

$$8. \quad \mathbf{D}_k = L_k + S_k - t \mathbf{E}^*(\mathbf{E}(L_k + S_k) - \mathbf{b})$$

End for

输出: $\chi_N$

## 3 实验结果与分析

为了验证重建算法的有效性和性能,选取了心脏电影 (cine) 数据、心脏灌注 (perfusion) 数据<sup>[10]</sup>以及 PINCAT

phantom 体膜<sup>[8]</sup>3组数据进行了定量和定性分析,如图1所示。其中图1(a)表示心脏电影图像,图1(b)表示心脏灌注图像,图1(c)表示 PINCAT phantom 数据。在算法性能比较方面采用了峰值信噪比(peak signal noise ratio, PSNR)和结构相似度(structural similarity index measurement, SSIM)<sup>[18]</sup>进行度量。

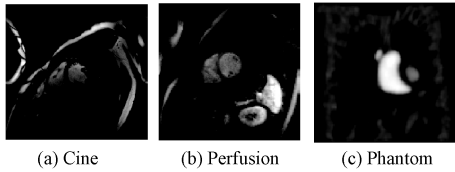


图1 原始测试图像数据集

Fig. 1 Original test image data sets

在算法测试中,心脏电影、心脏灌注和 phantom 体膜数据均选取了 24 帧数据,每帧心脏电影数据大小为  $256 \times 256$ ,每帧心脏灌注数据大小为  $192 \times 192$ ,每帧 phantom 体膜数据大小为  $128 \times 128$ ,接收线圈数为 12。采用笛卡尔采样方式进行数据采样,欠采样率为 16%。参数  $\lambda_L$  和  $\lambda_S$  的值分别设置为 0.01 和 0.002。算法迭代次数为 100 次。另外,动态磁共振图像重建对运动伪影较为敏感,因此在本文算法中预先对图像进行小波滤波预处理,以减轻运动引起的伪影。采用的小波框架滤波器为“sym2”,小波分解层数是 3 层。所有实验环境为 Windows10 操作系统、内存 16 G、处理器 Intel (R) Core (TM) i7-8086K CPU,仿真工具软件为 MATLAB R2018b。此外,实验中利用了 MIRT<sup>[19]</sup>工具进行仿真分析。

图2给出了心脏电影图像数据的低秩稀疏分解结果,其中图2(a)表示原始图像(包括4帧数据),图2(b)表示低秩成分,图2(c)表示稀疏成分。从图2中可以看出动态磁共振图像具有内在的低秩和稀疏特性。因此可借助于该特性对图像进行重建。

为了进一步验证提出的算法性能,本文算法与 FISTA<sup>[20]</sup>、低秩加稀疏算法(low-rank plus sparse, L+S)<sup>[7]</sup>以及近似点优化梯度算法(accelerated proximal optimized gradient method, APOGM)<sup>[13]</sup>进行了比较。实验中这些算法的参数都被调整至使得重建误差最小。图3~5给出了重建结果,图3~5(a)表示欠采样后的数据,(b)表示重构图像和残差图像。从图3~5可看出,本文算法的效果相对其他算法较好,重建图像中包含的伪影相对要少。进一步,图6~11分别给出了心脏电影、心脏灌注以及 phantom 体膜图像重建后的峰值信噪比和结构相似度性能,结果表明提出的算法具有较好的重建性能。本文算法优于以上3种算法的原因在于:通过结合低秩建模和小波框架,挖掘了动态磁共振图像的低秩结构和

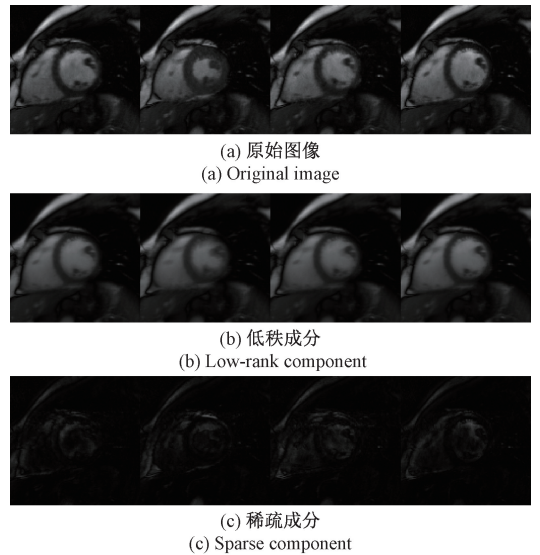


图2 基于心脏电影图像的低秩稀疏分解结果

Fig. 2 The decomposition results of low-rank sparse on cine

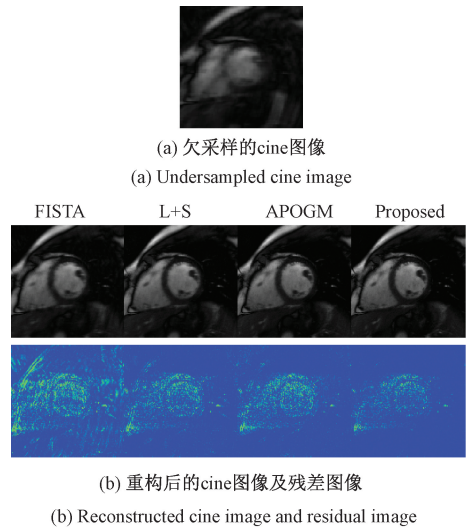


图3 心脏电影 cine 图像的重建结果

Fig. 3 The reconstruction results of cine image

局部先验信息。另外小波框架在稀疏逼近相对  $\ell_1$  范数更具优势,正如第1章所述,小波框架中的小波函数集合拥有多阶的消失矩和较短的支撑。另一个优势是小波框架对噪声具有较好鲁棒性,这归于小波框架的冗余特性。

最后,通过数值实验来进一步验证本文算法的重建性能。表1~3分别在不同采样率条件下给出了心脏电影 cine 图像、心脏灌注 perfusion 以及体膜 phantom 图像的实验结果。从表1~3的重建性能结果可以看出,基于本文算法重建的图像视觉质量优于 L+S<sup>[7]</sup>、FISTA<sup>[20]</sup>、APOGM<sup>[13]</sup>算法的性能,其中 APOGM 算法次之。

综合以上数值实验结果,进一步验证了本文所提图像重建算法的有效性。与基于加速的近似点优化梯度算

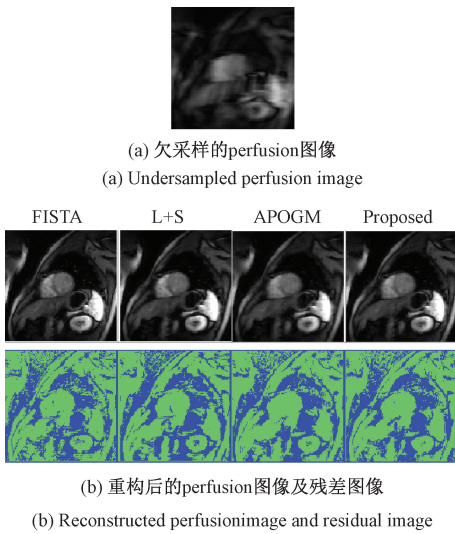


图 4 心脏灌注 perfusion 图像的重建结果  
Fig. 4 The reconstruction results of perfusion image

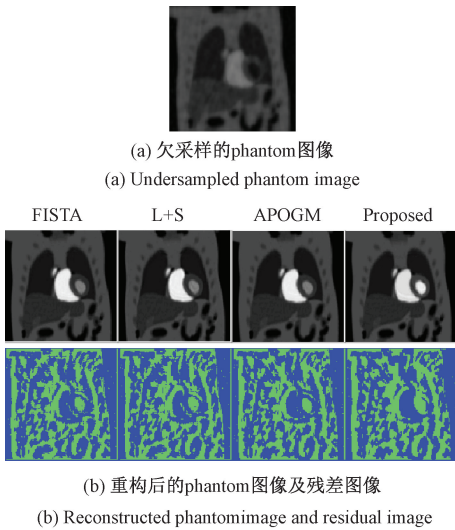


图 5 phantom 体膜图像的重建结果  
Fig. 5 The reconstruction results of phantom image

法 APOGM 相比, APOGM 算法利用了傅里叶变换进行稀疏逼近, 虽然运算效率较高。但是由于动态磁共振图像数据是一种非平稳信号, 而傅里叶变换适合周期稳定的信号分析, 因此图像重建性能的提升受到限制。小波框架变换是一种时间和频率的多尺度局部变换, 应用小波框架对磁共振图像进行稀疏逼近具有较好的拟合效果。

为了测试重建算法的收敛性能, 使用归一化均方根误差作为性能度量, 其计算公式为:  $\|X_{k+1} - X_k\|_2 / \|X_k\|_2$ , 其中  $X_k$  为第  $k$  次迭代的重建图像,  $X_{k+1}$  为第  $k + 1$  次迭代的重建图像。图 12 给出了提出算法在心脏电影 cine、心脏灌注 perfusion 以及体膜 phantom 图像上随着时间的收敛性能。从图 12 中可以看成, 算法在心

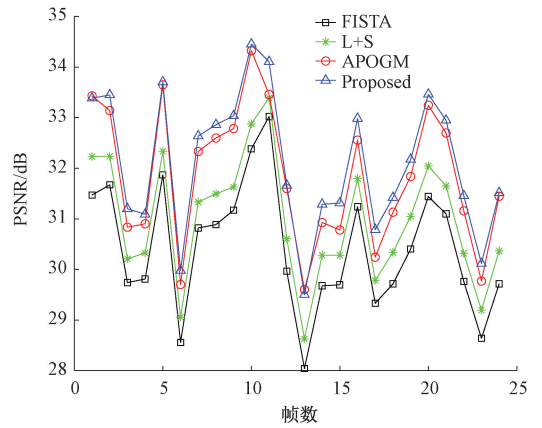


图 6 心脏电影图像重建后的性能 (PSNR)  
Fig. 6 The PSNR results of cine image

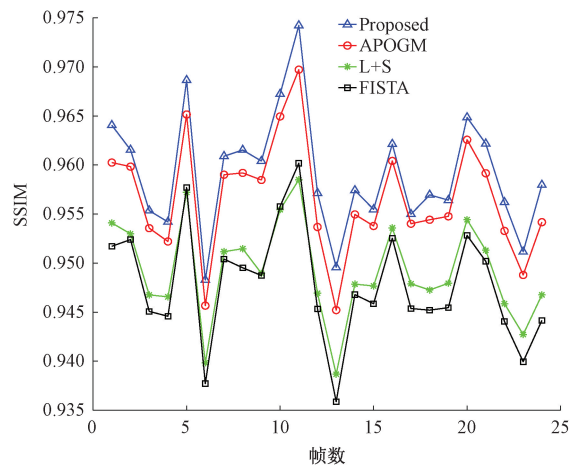


图 7 心脏电影图像重建后的性能 (SSIM)  
Fig. 7 The SSIM results of cine image

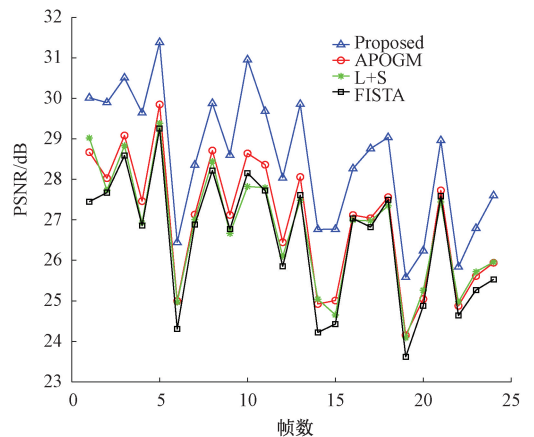


图 8 心脏灌注图像重建后的性能 (PSNR)  
Fig. 8 The PSNR results of perfusion image

脏电影、心脏灌注以及体膜图像上均具有较为稳健的收敛性能。

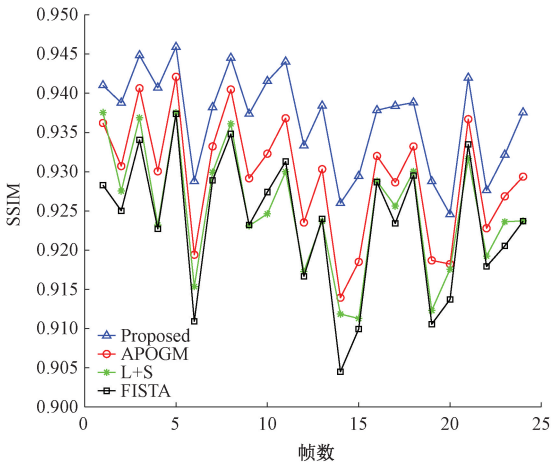


图9 心脏灌注图像重建后的性能(SSIM)  
Fig. 9 The SSIM results of perfusion image

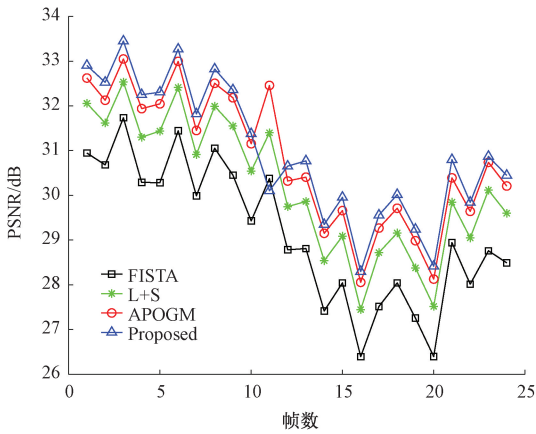


图10 phantom 图像重建后的性能(PSNR)  
Fig. 10 The PSNR results of phantom image

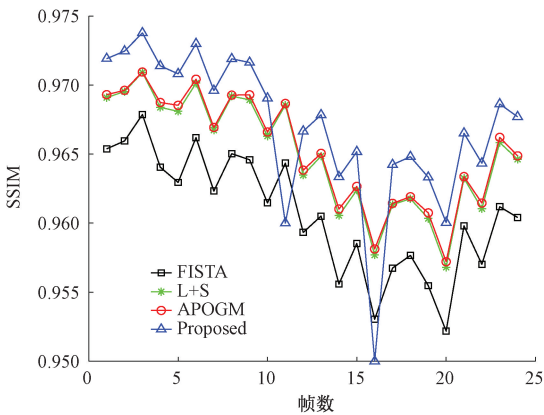


图11 phantom 图像重建后的性能(SSIM)  
Fig. 11 The SSIM results of phantom image

表1 心脏电影(cine)在不同采样率下的重建性能

**Table 1 Reconstruction performance of cine**

| 采样率 | 算法       | PSNR/dB  | SSIM    |
|-----|----------|----------|---------|
| 20% | FISTA    | 33.226 9 | 0.950 7 |
|     | L+S      | 33.583 4 | 0.964 5 |
|     | APOGM    | 34.790 2 | 0.968 1 |
|     | Proposed | 35.273 6 | 0.972 6 |
| 30% | FISTA    | 33.652 0 | 0.961 7 |
|     | L+S      | 34.954 8 | 0.968 9 |
|     | Proposed | 35.490 4 | 0.973 8 |

表2 心脏灌注(perfusion)在不同采样率下的重建性能

**Table 2 Reconstruction performance of perfusion**

| 采样率 | 算法       | PSNR/dB  | SSIM    |
|-----|----------|----------|---------|
| 20% | FISTA    | 29.726 9 | 0.926 3 |
|     | L+S      | 30.412 2 | 0.941 6 |
|     | APOGM    | 30.678 0 | 0.953 2 |
|     | Proposed | 31.052 8 | 0.945 1 |
| 30% | FISTA    | 29.904 2 | 0.928 7 |
|     | L+S      | 30.615 6 | 0.942 4 |
|     | Proposed | 31.802 4 | 0.950 3 |

表3 体膜(phantom)在不同采样率下的重建性能

**Table 3 Reconstruction performance of phantom**

| 采样率 | 算法       | PSNR/dB  | SSIM    |
|-----|----------|----------|---------|
| 20% | FISTA    | 29.803 4 | 0.916 4 |
|     | L+S      | 30.166 5 | 0.935 9 |
|     | APOGM    | 31.622 1 | 0.948 7 |
|     | Proposed | 32.476 9 | 0.958 6 |
| 30% | FISTA    | 30.656 3 | 0.956 1 |
|     | L+S      | 31.703 4 | 0.947 3 |
|     | Proposed | 33.834 2 | 0.979 2 |

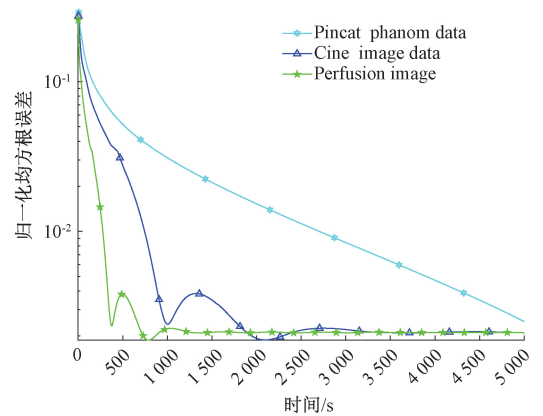


图12 提出的重建算法的收敛性能  
Fig. 12 The convergence performance of the proposed algorithm

为进一步分析提出的算法在体膜 phantom 图像上的性能,图 13 和 14 分别采用归一化均方根误差和峰值信噪比作为性能指标给出了算法的收敛性能结果。从图 13 中可以看出,当迭代次数趋于 100 次及以上时,提出算法的重建误差趋于 0,表明了算法随着迭代次数的增加,算法的性能趋于稳定。在图 14 中,当迭代次数超过 80 次以上时,峰值信噪比的值趋于稳定,进一步表明了算法在体膜 phantom 图像上的稳健性。通过以上结果分析,验证了算法具有较好的重建性能。

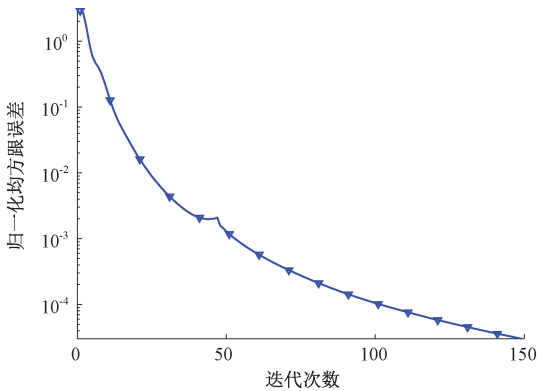


图 13 算法在体膜 phantom 图像上的重建性能

Fig. 13 The reconstruction performance on phantom image

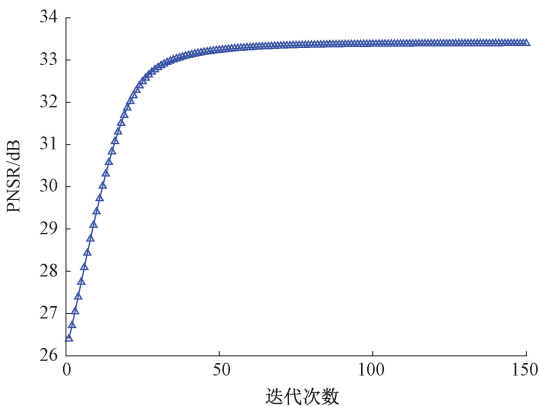


图 14 算法在体膜 phantom 上的性能(PSNR)

Fig. 14 PSNR results of the proposed algorithm on phantom

## 4 结 论

本文提出了一种结合低秩建模和小波框架的动态磁共振图像重建算法,通过低秩描述动态磁共振数据序列的内在相关性,以及利用小波框架刻画磁共振数据的稀疏性,进而实现磁共振图像的重建。实验结果表明,与基于  $\ell_1$  范数的压缩感知重建算法相比,本文算法具有稳健的重建性能,能够有效减少动态磁共振图像的伪影。但本文算法也存在一定的不足,如选择的小波框架基函数

是固定的,算法中参数的设置需要人工选取,算法重建质量和计算效率仍有待进一步提升。下一步工作将结合深度即插即用方法<sup>[21]</sup>、低秩 Hankel 方法<sup>[22]</sup>以及框架波<sup>[23]</sup>等方法,从信号的频域和空间域出发,深入分析动态磁共振数据的内在特性及关联性,应用相关凸优化算法,设计快速的图像并行重构算法,以实现高质量的磁共振图像重建。

## 参考文献

- [1] RAVISHANKAR S, YE J C, FESSLER J A. Image reconstruction: From sparsity to data-adaptive methods and machine learning [J]. Proceedings of the IEEE, 2020, 108(1): 86-109.
- [2] LIANG D, CHENG J, KE Z, et al. Deep magnetic resonance image reconstruction: Inverse problems meet neural networks [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2020, 37(1): 141-151.
- [3] KAMILOV U S, BOUMAN C A, BUZZARD G, et al. Plug-and-play methods for Integrating physical and learned models in computational imaging: Theory, algorithms, and applications [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2023, 40(1): 85-97.
- [4] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [5] 许富景, 杜少成, 荆蕊蕊. 基于压缩感知与分段 Hermite 插值的二维温度场重构方法 [J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(4): 40-47.  
XU F J, DU SH CH, JING R R. Two-dimensional temperature field reconstruction method based on compressed sensing and piecewise Hermite interpolation [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022, 36(4): 40-47.
- [6] LUSTIG M, DONOHO D, SANTOS J M, et al. Compressed sensing MRI [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 72-82.
- [7] TREMOULHEAC B, DIKAIOS N, ATKINSON D, et al. Dynamic MR image reconstruction-separation from undersampled (k,t)-space via low-rank plus sparse prior [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2014, 33(8): 1689-1701.
- [8] LINGALA S G, HU Y, DIBELLA E, et al. Accelerated dynamic MRI exploiting sparsity and low-rank structure: k-t SLR [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1042-1054.
- [9] OTAZO R, CANDÉS E, SODICKSON D K. Low-rank plus sparse matrix decomposition for accelerated dynamic MRI with separation of background and dynamic



- components [ J ]. *Magnetic Resonance in Medicine*, 2015, 73:1125-1136.
- [ 10 ] YAO J, XU Z, HUANG J Z. An efficient algorithm for dynamic MRI using low-rank and total variation regularizations[ J ]. *Medical Image Analysis*, 2018, 44: 14-27.
- [ 11 ] KIM D, FESSLER J A. Optimized first-order methods for smooth convex minimization [ J ]. *Mathematical Programming*, 2016, 159:81-107.
- [ 12 ] KIM D, FESSLER J A. On the convergence analysis of the optimized gradient method [ J ]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, 172: 187-205.
- [ 13 ] LIN C Y, FESSLER J A. Efficient dynamic parallel MRI reconstruction for the low-rank plus sparse model[ J ]. *IEEE Transactions on Computation Imaging*, 2019, 5(1): 17-26.
- [ 14 ] 吴叶丽,行鸿彦,李瑾,等. 改进阈值函数的小波去噪算法[ J ]. *电子测量与仪器学报*, 2022, 36(4): 9-16.  
WU Y L, XING H Y, LI J, et al. Wavelet denoising algorithm with improved threshold function[ J ]. *Journal of Electronic Measurement and Instrumentation*, 2022, 36(4): 9-16.
- [ 15 ] DONG B, SHEN Z W, XIE P C. Image restoration: A general wavelet frame based model and its asymptotic analysis[ J ]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2017, 49(1): 421-445.
- [ 16 ] NESTEROV Y. A method of solving a convex programming problem with convergence rate  $O(1/k^2)$  [ J ]. *Soviet Mathematics Doklady*, 1983, 27(2): 372-376.
- [ 17 ] WRIGHT J, MA Y. *High-Dimensional Data Analysis with Low-Dimensional Models: Principles, Computation, and Applications*[ M ]. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.
- [ 18 ] WANG Z, BOVIK A C, SHEIKH R, et al. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity[ J ]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(4): 600-612.
- [ 19 ] FESSLER J A. Optimization methods for magnetic resonance image reconstruction: Key models and optimization algorithms [ J ]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2020, 37(1): 33-40.
- [ 20 ] BECK A, TEOULLE M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems[ J ]. *SIAM Journal Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 183-202.
- [ 21 ] ZHANG K, LI K, ZUO W, et al. Plug-and-play image restoration with deep denoiser prior [ J ]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2022, 44(10): 6360-6376.
- [ 22 ] ZHANG X, LU H, GUO D, et al. Accelerated MR reconstruction with separable and enhanced low-rank Hankel regularization[ J ]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2022, 41(9): 2486-2498.
- [ 23 ] HE Z, ZHU Y N, QIU S, et al. Low-rank and framelet based sparsity decomposition for interventional MRI reconstruction [ J ]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 2022, 69(7): 2294-2304.

### 作者简介



刘金华(通信作者), 2011年于电子科技大学获得博士学位, 现为上饶师范学院教授, 主要研究方向为图像处理、小波深度学习。

E-mail: liujinhua\_uestc@126.com

**Liu Jinhua** (Corresponding author), received his Ph. D. degree from the University of Electronic Science and Technology of China (UESTC) in 2011. He is currently a professor at Shangrao Normal University. His main research interests include image processing and wavelet deep learning.