

DOI: 10.13382/j.jemi.B2306815

基于高阶累积量 ESPRIT 算法的指数衰减 正弦信号参数估计*

单泽彪^{1,2} 徐恩达¹ 张旭² 刘小松¹

(1. 长春理工大学电子信息工程学院 长春 130022; 2. 长春气象仪器研究所 长春 130102)

摘要: 工程应用中环境噪声多表现为高斯有色噪声,而针对高斯白噪声进行处理的算法失效问题,提出了一种高斯色噪声环境中用于多分量衰减正弦信号频率和衰减因子估计的四阶累积量 ESPRIT 算法。首先,推导出四阶累积量与观测样本中的自相关矩阵和互相关矩阵之间的关系,求出其四阶累积量矩阵。其次,通过对四阶累积量进行广义特征值分解,根据广义特征值即可得到信号衰减因子和频率的估计值。最后对所提算法进行了仿真实验验证,在混合信噪比为 0 dB 时,所提算法针对多分量衰减正弦信号角频率和衰减因子的平均估计误差分别为 $0.002\ 0\pi$ rad 和 $0.002\ 0$ 。在高斯白噪声和高斯色噪声背景下与 ESPRIT 算法和 Prony 算法相比具有更强的噪声抑制能力和更高的估计精度。

关键词: 衰减正弦信号;高阶累积量;ESPRIT 算法;衰减因子估计;频率估计

中图分类号: TN911;TH765 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 460.40

Parameter estimation of exponentially decayed sinusoidal signals based on high-order cumulant ESPRIT algorithm

Shan Zebiao^{1,2} Xu Enda¹ Zhang Xu² Liu Xiaosong¹

(1. School of Electronic and Information Engineering, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China;

2. Changchun Meteorological Instrument Research Institute, Changchun 130102, China)

Abstract: Aiming at the problem that the actual environmental noise in engineering applications is mainly manifested as Gaussian colored noise and the algorithms for processing Gaussian white noise fail, a fourth-order cumulant ESPRIT algorithm is proposed for the estimation of the frequency and attenuation factor of multicomponent attenuated sinusoidal signals in Gaussian colored noise environments. First, the relationship between the fourth-order cumulants and the autocorrelation and intercorrelation matrices in the observed samples is derived to find their fourth-order cumulant matrices. Second, the generalized eigenvalue decomposition of the fourth-order cumulants is performed, and the signal attenuation factor and frequency estimates can be obtained based on the generalized eigenvalues. Finally, the proposed algorithm is validated by simulation experiments. The average estimation errors of the proposed algorithm for the angular frequency and the attenuation factor of the multicomponent fading sinusoidal signal are $0.002\ 0\pi$ rad and $0.002\ 0$ at the hybrid signal-to-noise ratio of 0 dB. Compared with ESPRIT and Prony algorithms, the proposed algorithm has stronger noise suppression ability and higher parameter estimation accuracy in Gaussian white noise and Gaussian colored noise backgrounds.

Keywords: exponential attenuation sine; high order cumulants; ESPRIT algorithm; attenuation factor estimation; frequency estimation

0 引言

指数衰减正弦信号参数估计在生物医学工程、电力系统、核磁共振、雷达声纳以及信号检测等多个领域有着

广泛的应用^[1]。传统的参数估计方法主要针对恒定幅度的正弦信号参数进行估计,并且已经发展的较为成熟。然而,指数衰减正弦信号的包络呈指数衰减形式,并且幅度大小逐渐衰减变化,因此不能完全依赖于恒定正弦信号参数估计的方法来估计其参数^[2]。

收稿日期: 2023-08-10 Received Date: 2023-08-10

* 基金项目: 吉林省自然科学基金项目(YDZJ202301ZYTS412)、吉林省教育厅科学技术项目(JJKH20240938KJ)、吉林省教育厅产业化培育项目(JJKH20240940CY)资助

近年来,相关学者提出的指数衰减正弦信号参量估计的方法,大多数是由正弦信号参量估计方法推演而来^[3]。其中傅里叶变换方法是用于衰减正弦信号参数估计的典型方法之一^[4-6],但是傅里叶变换类方法在本质上无法克服频谱畸变和泄露的问题,最终导致估计精度较差。最小二乘法是一种常见的数学优化方法,其也可用于指数衰减正弦信号参数估计,它的基本思想是寻找一组信号的振幅、频率和相位等参数,使这组信号与给定数据点的差的平方和最小,但该方法存在计算复杂度高、受噪声影响较大等问题^[7-8]。广义最小二乘法是对最小二乘法的一种扩展,其考虑了噪声的影响,估计精度有所提高,但是仍然存在计算复杂度高和使用条件受限等问题。利用状态空间模型对信号参数进行估计可以建立包含待估计参数的状态空间模型,以隐含的时间作为自变量,适用于指数衰减正弦信号参数估计^[9-10]。但是建立状态空间模型需要大量的数据,并且这种对模型的假设要求较高。基于线性预测和神经网络的方法由于需要迭代训练,计算量较大^[11]。智能计算方法如遗传算法和极大似然法具有较好的全局搜索能力,在低信噪比下表现欠佳,并且搜索空间维数较大^[12-13]。现代谱估计方法中 ESPRIT (estimating signal parameters via rotational invariance techniques) 算法无需谱峰搜索,利用其内部的旋转不变特性,通过奇异值分解即可进行频率和衰减因子的有效估计^[14-16],并且具有高分辨率参数估计特性,是一种经典的衰减正弦信号参数估计方法。

高斯噪声包括高斯白噪声和高斯有色噪声,高斯白噪声只是理论上的一种模型,在实际工程中,信号中存在的附加噪声往往是高斯有色噪声^[17]。高阶谱分析技术被广泛应用于信号处理领域,其中高阶累积量 (higher order cumulant, HOC) 对比自相关函数和功率谱包含了如相位等更多的信息,且对于高斯噪声的高阶累积量 (阶次 $k \geq 3$) 为 0^[18]。因此,从理论角度分析来看,高阶累积量可以完全抑制高斯白噪声及有色噪声对参数估计的影响^[19-20]。鉴于高阶累积量和 ESPRIT 算法的特点,给出了一种高斯有色噪声背景下基于高阶累积量 ESPRIT (HOC-ESPRIT) 算法的衰减正弦信号参数估计方法。首先求出待测信号的四阶累积量,推导出四阶累积量与观测样本中的自相关矩阵和互相关矩阵之间的关系进行替代,然后对四阶累积量进行特征值分解,进而估计出衰减因子和角频率。在高斯有色噪声背景下利用基于四阶累积量 ESPRIT 算法对指数衰减正弦信号进行角频率和衰减因子估计,可以提高参数估计的精度和稳定性,尤其是在低信噪比条件下表现性能更为突出。

1 衰减正弦信号数学模型

针对指数衰减正弦信号进行频率和衰减因子估计,

则多分量指数衰减正弦信号模型可表示为:

$$x(n) = \sum_{i=1}^p \beta_i e^{-d_i n} e^{j(\omega_i n + \varphi_i)} + \omega(n) \quad (1)$$

式中: p 是信号分量个数, β_i 为信号幅值, d_i 是衰减因子, ω_i 为角频率, φ_i 为初始相位, $\omega(n)$ 为附加高斯噪声。

2 基于高阶累积量 ESPRIT 的参数估计

2.1 高阶累积量

高阶累积量的阶数大于或等于 3, 对于 $k (k \geq 3)$ 阶平稳随机过程 $x(n)$, 当其均值为 0 时该过程的 n 阶矩与 n 阶累积量为包含独立变元个数为 $n-1$ 的函数。该过程的 n 阶矩 m_{nx} 和 n 阶累积量 c_{nx} 定义为:

$$m_{nx}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \text{mom}\{x(n), x(n + \tau_1), \dots, x(n + \tau_{n-1})\} \quad (2)$$

$$c_{nx}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = \text{cum}\{x(n), x(n + \tau_1), \dots, x(n + \tau_{n-1})\} \quad (3)$$

假设 $x(n)$ 为高斯随机过程, 令 $x_1 = x(n)$, $x_2 = x(n + \tau_1)$, \dots , $x_k = x(n + \tau_k)$, 根据高阶累积量的定义式(3), 可以计算得到 $x(n)$ 的所有阶次累积量, 即:

$$\begin{cases} c_{1x} = E\{x(n)\} = 0 \\ c_{2x}(\tau) = E\{x(n)x(n + \tau)\} = r(\tau) \\ c_{kx}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1}) \equiv 0, k \geq 3 \end{cases} \quad (4)$$

由此可得, 所有高斯随机过程的高阶累积量始终为 0。因此, 通过使用高阶累积量, 能够有效地消除信号中的高斯白噪声和高斯有色噪声的影响。

设 $x(n)$ 的均值为 0 且为平稳随机过程, 则其四阶累积量可以表示为:

$$\begin{aligned} c_{4x}(m_1, m_2, m_3) &= m_{4x}(m_1, m_2, m_3) - \\ &E\{x(n)x(n + m_1)\}E\{x^*(n + m_2)x^*(n + m_3)\} - \\ &E\{x(n)x^*(n + m_2)\}E\{x(n + m_1)x^*(n + m_3)\} - \\ &E\{x(n)x^*(n + m_3)\}E\{x(n + m_1)x^*(n + m_2)\} \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 衰减正弦信号参数估计原理分析

定义 $y(n) = x(n + 1)$, 构造以下 $m \times 1$ 维向量 (选择 $m > p$):

$$\mathbf{x}(n) = [x(n), x(n + 1), \dots, x(n + m - 1)]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{w}(n) = [w(n), w(n + 1), \dots, w(n + m - 1)]^T \quad (7)$$

$$\mathbf{y}(n) = [y(n), y(n + 1), \dots, y(n + m - 1)]^T = [x(n + 1), x(n + 2), \dots, x(n + m)]^T \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\alpha}(\omega_i, d_i) = [1, e^{-d_i + j\omega_i}, \dots, e^{(-d_i + j\omega_i)(m-1)}]^T \quad (9)$$

改写为矩阵形式如下所示:

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{A}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{s}(n) + \mathbf{w}(n + 1) \quad (11)$$

式中: $\mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha}(\omega_1, d_1), \boldsymbol{\alpha}(\omega_2, d_2), \dots, \boldsymbol{\alpha}(\omega_p, d_p)]$, $\mathbf{s}(n) = [s_1 e^{(-d_1 + j\omega_1)n}, s_2 e^{(-d_2 + j\omega_2)n}, \dots, s_p e^{(-d_p + j\omega_p)n}]^T$, $\boldsymbol{\Phi} = \text{diag}$

($e^{-d_1+j\omega_1}, e^{-d_2+j\omega_2}, \dots, e^{-d_p+j\omega_p}$) 称为旋转算符。

观测向量 $\mathbf{x}(n)$ 的自相关矩阵为:

$$\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{x}^H(n)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (12)$$

其矩阵形式可以写成:

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}^*(1) & \cdots & r_{xx}^*(m-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}^*(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(m-1) & r_{xx}(m-1) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (13)$$

式中: $\mathbf{P} = E\{s(n)s^H(n)\}$ 是信号向量的相关矩阵。

向量 $\mathbf{x}(n)$ 和 $\mathbf{y}(n)$ 的互相关矩阵为:

$$\mathbf{R}_{xy} = E\{\mathbf{x}(n)\mathbf{y}^H(n)\} = \mathbf{A}\mathbf{P}\Phi^H\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{Z} \quad (14)$$

用矩阵形式可表示为:

$$\mathbf{R}_{xy} = \begin{bmatrix} r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \cdots & r_{xx}(m) \\ r_{xx}^*(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^*(m-2) & r_{xx}^*(m-3) & \cdots & r_{xx}^*(1) \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中: $\sigma^2\mathbf{Z} = E\{\mathbf{w}(n)\mathbf{w}^H(n+1)\}$, \mathbf{Z} 是主对角线下面的对角线上的元素全为 1, 其他元素为 0 的 $m \times m$ 矩阵。

对 \mathbf{R}_{xx} 作特征值分解, 得到特征值的最小值 $\lambda_{\min} = \sigma^2$ 。得到新的矩阵为:

$$\mathbf{C}_{xx} = \mathbf{R}_{xx} - \lambda_{\min}\mathbf{I} = \mathbf{R}_{xx} - \sigma^2\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H \quad (16)$$

$$\mathbf{C}_{xy} = \mathbf{R}_{xy} - \lambda_{\min}\mathbf{Z} = \mathbf{R}_{xy} - \sigma^2\mathbf{Z} = \mathbf{A}\mathbf{P}\Phi\mathbf{A}^H \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}^*(1) & \cdots & r_{xx}^*(m-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \cdots & r_{xx}^*(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(m-1) & r_{xx}(m-2) & \cdots & r_{xx}(0) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{C}_{xy} = \begin{bmatrix} r_{xx}(1) & r_{xx}(2) & \cdots & r_{xx}(m) \\ r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \cdots & r_{xx}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}^*(m-2) & r_{xx}^*(m-3) & \cdots & r_{xx}(1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$\{\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xy}\}$ 称为矩阵对, 对此矩阵做广义特征分解得 $\mathbf{C}_{xx}\mathbf{u} = \gamma\mathbf{C}_{xx}\mathbf{u}$, 所以 γ 为广义特征值, \mathbf{u} 为广义特征向量。由广义特征值可推导出角频率和衰减因子的估计式分别为:

$$\hat{\omega}_i = \angle \gamma_i \quad (20)$$

$$\hat{d}_i = -\ln[\operatorname{Re}(\gamma_i)], i = 1, 2, \dots, p \quad (21)$$

2.3 基于四阶累积量 ESPRIT 算法的参数估计

利用四阶累积量 $\mathbf{C}_{4x}, \mathbf{C}_{4xy}$ 对 $\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xy}$ 进行替代, 需确定它们之间的关系。对于衰减正弦信号 $x(n)$, 其自相关

函数为:

$$r_x(m) = E\{x(n)x^*(n+m)\} = \sum_{k=1}^p |x_k|^2 \exp(-j\omega_k m - d_k(2n+m)) \quad (22)$$

由式(3)可得其四阶累积量为:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{4x}(m_1, m_2, m_3) = & -E\left[\sum_{k=1}^p 2|x_k|^4 \exp(-j\omega_k(m_2+m_3-m_1) - d_k(4n+m_2+m_3-m_1))\right] \end{aligned} \quad (23)$$

当 $m_1 = m_2 = m_3 = m$ 时, 式(23)可改写为:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{4x}(m) = & -E\left[\sum_{k=1}^p 2|x_k|^4 \exp(-j\omega_k m - d_k(4n+m))\right] = \\ & -\sum_{k=1}^p |x_k|^4 \exp(-j\omega_k m - d_k(4n+m)) \end{aligned} \quad (24)$$

由式(22)、(24)可知 $x(n)$ 的自相关函数 $r_x(m)$ 和四阶累积量 $\mathbf{C}_{4x}(m)$ 之间的关系为:

$$\mathbf{C}_{4x}(m) = -r_x(m) \cdot |x_k|^2 \cdot e^{-2nd_k} \quad (25)$$

观察 $\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xy}$ 并重新构造四阶累积量矩阵 $\mathbf{C}_{4x}, \mathbf{C}_{4xy}$:

$$\mathbf{C}_{4x} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{4x}(0) & \mathbf{C}_{4x}^*(1) & \cdots & \mathbf{C}_{4x}^*(m-1) \\ \mathbf{C}_{4x}(1) & \mathbf{C}_{4x}(0) & \cdots & \mathbf{C}_{4x}^*(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{4x}(m-1) & \mathbf{C}_{4x}(m-2) & \cdots & \mathbf{C}_{4x}(0) \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{C}_{4xy} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{4x}(1) & \mathbf{C}_{4x}(2) & \cdots & \mathbf{C}_{4x}(m) \\ \mathbf{C}_{4x}^*(0) & \mathbf{C}_{4x}(1) & \cdots & \mathbf{C}_{4x}(m-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{4x}^*(m-2) & \mathbf{C}_{4x}^*(m-1) & \cdots & \mathbf{C}_{4x}^*(1) \end{bmatrix} \quad (27)$$

由式(16)、(17)、(25)可得

$$\mathbf{C}_{4x} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\mathbf{P}^2\mathbf{A}^H \quad (28)$$

$$\mathbf{C}_{4xy} = \mathbf{A}\mathbf{S}\Phi^H\mathbf{A}^H = -\mathbf{A}\mathbf{P}^2\Phi^H\mathbf{A}^H \quad (29)$$

其中:

$$\mathbf{S} = \operatorname{diag}[-|s_1|^4 e^{-4nd_1}, -|s_2|^4 e^{-4nd_2}, \dots, -|s_p|^4 e^{-4nd_p}] \quad (30)$$

因 $\mathbf{P} = E\{s(n)s^H(n)\}$ 为对角矩阵, 矩阵相乘可以改变其中对角矩阵的顺序, 所以可得 $\mathbf{C}_{4x}, \mathbf{C}_{4xy}$ 与 $\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xy}$ 之间的关系为:

$$\mathbf{C}_{4x} = -\mathbf{C}_{xx}\mathbf{P} \quad (31)$$

$$\mathbf{C}_{4xy} = -\mathbf{C}_{xy}\mathbf{P} \quad (32)$$

设 $\mathbf{\Gamma}$ 为矩阵对 $\{\mathbf{C}_{4x}, \mathbf{C}_{4xy}\}$ 的广义特征值矩阵, \mathbf{S} 为非奇异矩阵, 则 $\mathbf{\Gamma}$ 与旋转因子 Φ 的关系为:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

从信号模型可以看出, $\mathbf{C}_{4x} = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}^H$ 的秩为 p , 考察下

列矩阵束 $C_{4x} - \gamma C_{4xy} = AS(I - \gamma\Phi^H)A^H$, 由于 ASA^H 与 $AS\Phi^HA^H$ 的行空间相同, 所以通常情况下 $(ASA^H - \gamma AS\Phi^HA^H)$ 的秩为 p 。如果满足 $\gamma = \exp(j\omega_i - d_i)$, 则 $(I - \gamma\Phi^H)$ 第 i 列全为 0, 矩阵 $(I - \exp(j\omega_i - d_i)\Phi^H)$ 的秩为 $(p - 1)$, 这时矩阵 $(C_{4x} - \gamma C_{4xy})$ 的秩减小为 $(p - 1)$ 。根据广义特征值的定义, $\gamma = \exp(j\omega_i - d_i)$ 是矩阵对 $\{C_{4x}, C_{4xy}\}$ 的广义特征值, 因为这两个矩阵描述同一空间, 它们共有的零空间对应的广义特征值也一定是 0, 它们对应的广义特征向量也一样。因此, 矩阵对 $\{C_{4x}, C_{4xy}\}$ 的 p 个广义特征值在单位圆上, 且与矩阵 Φ 的对角线元素相等, 而其余 $(m - p)$ 个广义特征值在原点上。因此仍然满足 $\hat{\omega}_i = \angle \gamma_i, \hat{d}_i = -\ln[\text{Re}(\gamma_i)]$ 。

3 仿真验证与分析

实验 1, 有效性验证实验。指数衰减正弦信号分量个数 $p = 3$, 信号幅值 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 4$; 衰减因子 $d_1 = 0.025, d_2 = 0.03, d_3 = 0.035$; 信号角频率 $\omega_1 = 0.025\pi \text{ rad}, \omega_2 = 0.03\pi \text{ rad}, \omega_3 = 0.035\pi \text{ rad}$ 。图 1 给出了上述参数的多分量指数衰减正弦信号原始波形以及附加高斯白噪声和高斯色噪声后的信号波形, 信噪比 (signal to noise ratio, SNR) 均为 -5 dB 。

采用本文算法对图 1 所示多分量指数衰减正弦信号的参数进行估计, 在不同信噪比下分别进行 100 次蒙特卡罗独立实验, 估计结果如图 2~3 所示。

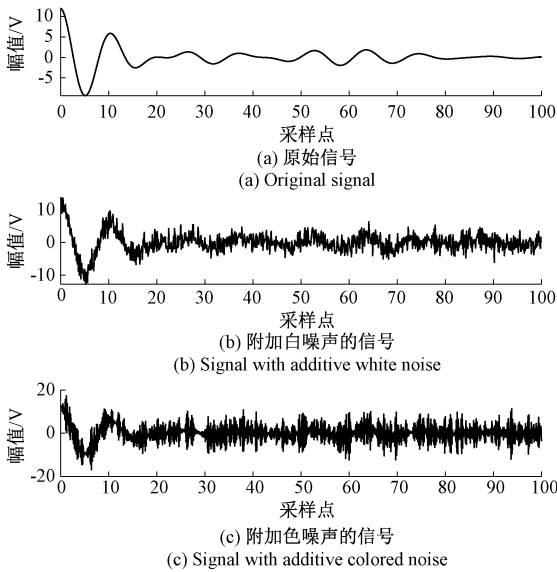


图 1 多分量指数衰减正弦信号

Fig. 1 Multi-component exponentially attenuated sinusoidal signal

图 2 和 3 分别给出了在 Gaussian 白噪声和 Gaussian 色噪声下指数衰减正弦信号各个信号分量的角频率和衰减因子的

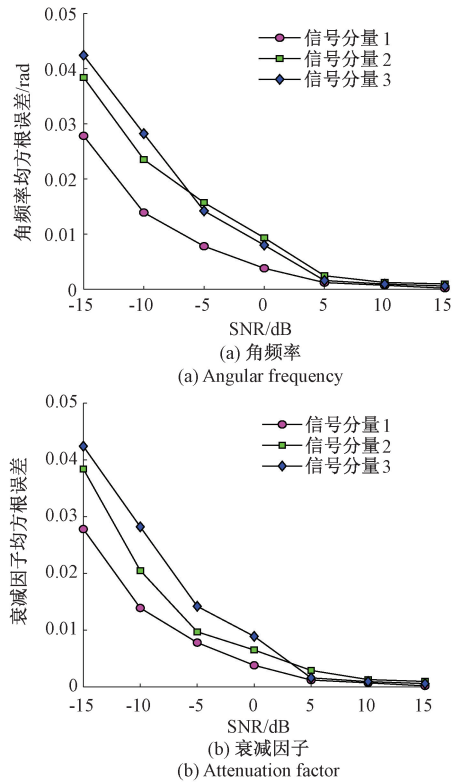


图 2 白噪声下衰减因子和角频率估计均方根误差
Fig. 2 Root mean square error of attenuation factor and corner frequency estimation in white noise

估计均方根误差曲线。从中可以看出无论是在白噪声还是色噪声背景下, 各信号分量的衰减因子和角频率估计均方根误差均较小, 且当信噪比高于 0 dB 时, 本文算法对角频率和衰减因子的估计精度和稳健性都表现良好。

实验 2, 不同算法对比验证实验。实验条件如同实验 1。在 Gaussian 白噪声和 Gaussian 色噪声背景下分别采用 HOC-ESPRIT 算法、ESPRIT 算法和 Prony 算法对信号频率和衰减因子进行估计, 在不同信噪比下分别进行 100 次蒙特卡罗独立实验, 得到各参数的均方根误差曲线如图 4 和 5 所示。

从图 4 可以看出, 在 Gaussian 白噪声背景下尤其在较高信噪比时三者表现接近。但在信噪比较低时 HOC-ESPRIT 算法与 ESPRIT 算法和 Prony 算法相比, 其均方根误差更小。由图 5 可知, 在存在 Gaussian 色噪声的情况下, HOC-ESPRIT 算法表现出明显优越性, 其均方根误差远低于另外两种算法, 尤其是在较低信噪比时 HOC-ESPRIT 算法估计效果更加优越。表明 HOC-ESPRIT 算法针对 Gaussian 有色噪声具有较好的抑制性能, 验证了 HOC-ESPRIT 算法的有效性。

实验 3, 不同噪声背景下不同算法的参数估计性能对比实验。为了进一步验证 HOC-ESPRIT 算法在不同噪

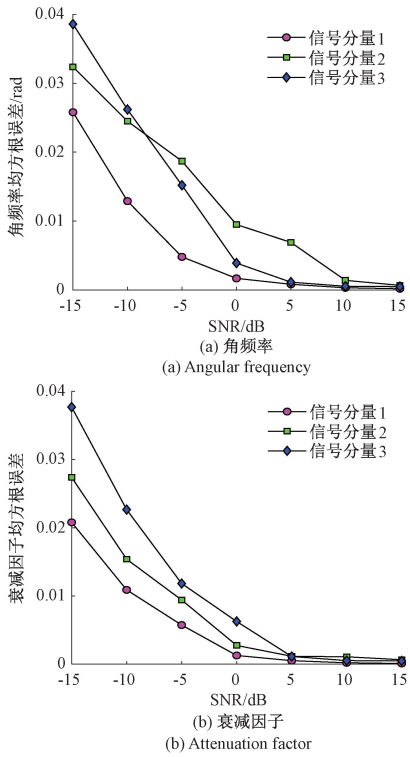


图 3 色噪声下衰减因子和角频率估计均方根误差
Fig. 3 Root mean square error of attenuation factor and angular frequency estimation in color noise

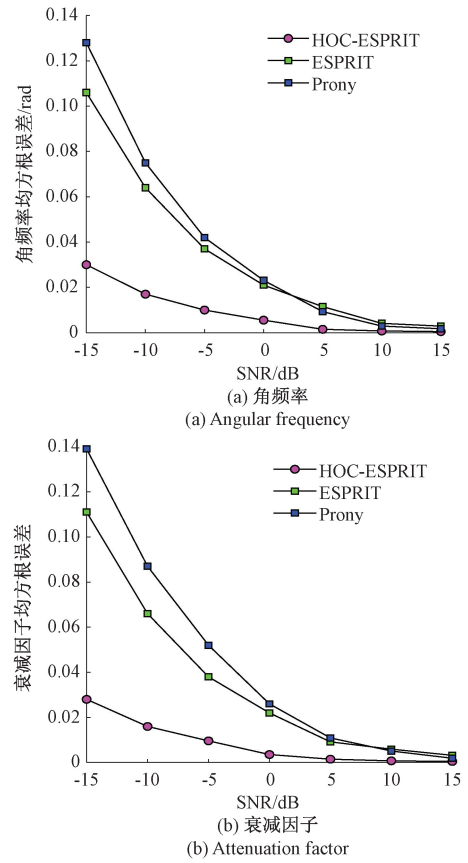


图 5 色噪声下不同算法估计性能比较
Fig. 5 Comparison of estimation performance of different methods under color noise

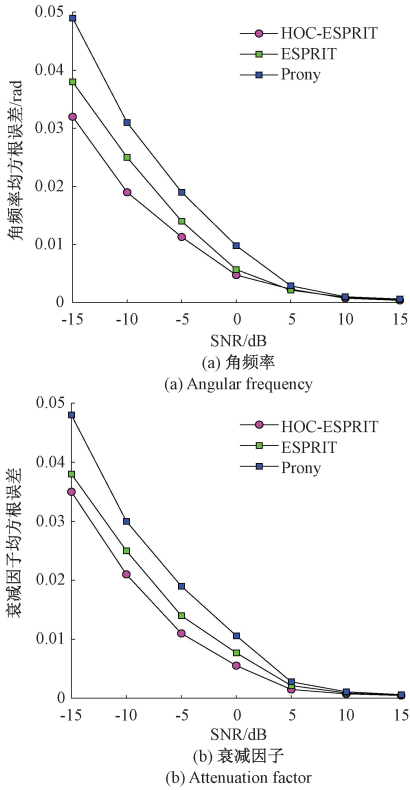


图 4 白噪声下不同算法估计性能比较
Fig. 4 Comparison of estimation performance of different methods under white noise

声背景下对指数衰减正弦信号参数估计的优越性,在高斯白噪声和高斯色噪声混合噪声背景下采用 HOC-ESPRIT 算法和 ESPRIT 算法及 Prony 算法分别进行信号频率和衰减因子估计。不同信噪比条件下的信号数据波形如图 6 所示,信噪比分别为 -5、0 和 5 dB。进行 100 次重复实验,不同算法参数估计结果如表 1 所示。

由表 1 可知,HOC-ESPRIT 算法与 ESPRIT 算法和 Prony 算法相比,在不同信噪比条件下所估计出的信号角频率和衰减因子均更加接近于实际值,其中在信噪比为 0 dB 时,HOC-ESPRIT 算法估计出的 3 个信号角频率和衰减因子的平均误差分别为 $0.002 0\pi$ rad, $0.002 0$; ESPRIT 算法估计平均误差分别为 $0.010 0\pi$ rad, $0.020 7$; Prony 算法估计平均误差分别为 $0.011 2\pi$ rad, $0.027 6$ 。可见 HOC-ESPRIT 算法估计误差相对更小,说明其具有更强的抗噪声能力和更高的估计精度。针对同一种算法,在不同信噪比条件下,所估计结果有不同程度的差距,其中 Prony 算法最差、ESPRIT 算法次之、HOC-ESPRIT 算法性能最好,表明 HOC-ESPRIT 算法具有更优的噪声抑制鲁棒性。

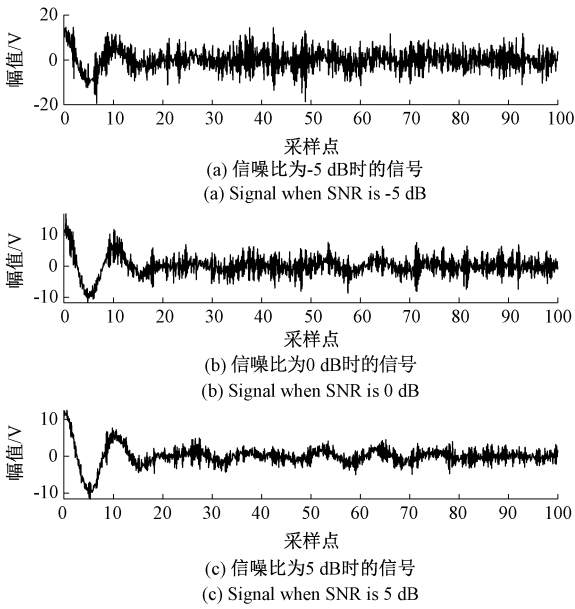


图 6 不同噪声背景下多分量指数衰减正弦信号

Fig. 6 Multi-component exponentially attenuated sinusoidal signal under different noise backgrounds

4 结 论

针对工程应用中实际环境噪声多表现为高斯有色噪声,而针对高斯白噪声进行处理的算法失效问题,给出了一种基于高阶累积量 ESPRIT 算法的多分量指数衰减正弦信号参数估计算法。首先构造四阶累积量代替观测样本的自相关矩阵和互相关矩阵,计算它们之间的关系并确定四阶累积量的结果。然后通过对四阶累积量进行广义特征值分解得到特征值,从而获得衰减因子和频率的估计值。该算法在面对高斯白噪声和高斯色噪声干扰时,与 ESPRIT 算法及 Prony 算法相比具有更优的参数估计性能。在 0 dB 混合噪声背景下,针对多分量衰减正弦信号角频率和衰减因子的平均估计误差分别为 0.002 0π rad 和 0.002 0,表明其具有较高的噪声抑制能力和较高的估计精度。

表 1 混合噪声背景下不同算法估计结果

Table 1 Estimation results of different algorithms under mixed noise background

信号参数	信噪比	HOC-ESPRIT 算法		ESPRIT 算法		Prony 算法	
		估计值	估计误差	估计值	估计误差	估计值	估计误差
$\omega_1 = 0.025\pi \text{ rad}$ $\omega_2 = 0.030\pi \text{ rad}$ $\omega_3 = 0.035\pi \text{ rad}$	-5 dB	$\omega_1 = 0.0189\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0347\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0404\pi \text{ rad}$	0.0054π rad	$\omega_1 = 0.0128\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0434\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0214\pi \text{ rad}$	0.0131π rad	$\omega_1 = 0.0450\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0501\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0556\pi \text{ rad}$	0.0202π rad
	0 dB	$\omega_1 = 0.0231\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0277\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0369\pi \text{ rad}$	0.0020π rad	$\omega_1 = 0.0161\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0401\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0460\pi \text{ rad}$	0.0100π rad	$\omega_1 = 0.0153\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0195\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0483\pi \text{ rad}$	0.0112π rad
	5 dB	$\omega_1 = 0.0245\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0306\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0353\pi \text{ rad}$	0.0005π rad	$\omega_1 = 0.0302\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0257\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0396\pi \text{ rad}$	0.0047π rad	$\omega_1 = 0.0299\pi \text{ rad}$, $\omega_2 = 0.0347\pi \text{ rad}$, $\omega_3 = 0.0312\pi \text{ rad}$	0.0048π rad
$d_1 = 0.025$ $d_2 = 0.030$ $d_3 = 0.035$	-5 dB	$d_1 = 0.0328$, $d_2 = 0.0401$, $d_3 = 0.0419$	0.0083	$d_1 = 0.0675$, $d_2 = 0.0692$, $d_3 = 0.0050$	0.0372	$d_1 = 0.0847$, $d_2 = 0.0012$, $d_3 = 0.1053$	0.0529
	0 dB	$d_1 = 0.0271$, $d_2 = 0.0318$, $d_3 = 0.0329$	0.0020	$d_1 = 0.0047$, $d_2 = 0.0512$, $d_3 = 0.0145$	0.0207	$d_1 = 0.0590$, $d_2 = 0.0046$, $d_3 = 0.0584$	0.0276
	5 dB	$d_1 = 0.0247$, $d_2 = 0.0303$, $d_3 = 0.0342$	0.0005	$d_1 = 0.0183$, $d_2 = 0.0362$, $d_3 = 0.0416$	0.0065	$d_1 = 0.0322$, $d_2 = 0.0383$, $d_3 = 0.0294$	0.0070

参考文献

[1] YEM V, KAJIMOTO H. Combination of cathodic electrical stimulation and mechanical damped sinusoidal vibration to express tactile softness in the tapping process[C]. Haptics Symposium, San Francisco, CA, USA, 2018; 84-88.

[2] JIANG X, WU S, CHEN Y, et al. Parameter estimation for sinusoidal frequency-modulated signals using phase modulation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2020, 28: 76-80.

[3] CHEN B, LI P. Finite-time estimation of multiple exponentially-damped sinusoidal signals: A kernel-based

- approach[J]. *Automatica*, 2019, 106: 1-7.
- [4] TOMAR S, SUMATHI P. Amplitude and frequency estimation of exponentially decaying sinusoids[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2018, 67(1): 229-237.
- [5] QUINN B G. Estimating parameters in noisy low frequency exponentially damped sinusoids and exponentials[C]. *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Shanghai, China, 2016: 4298-4302.
- [6] 王鸿,刘春华,齐国清. 基于 FFT 和 DTFT 的指数衰减复正弦信号参数估计算法[J]. *计算机应用与软件*, 2021, 38(3): 249-255.
WANG H, LIU CH H, QI G Q. Parameter estimation algorithm for exponentially decayed complex sinusoidal signals based on FFT and DTFT [J]. *Computer Application and Software*, 2021, 38(3): 249-255.
- [7] XU H T, HASSANI V, SOARES C G. Comparing generic and vectorial nonlinear maneuvering models and parameter estimation using optimal truncated least square support vector machine[J]. *Applied Ocean Research*, 2020, 97: 1-13.
- [8] 潘峰,王长林,赵超. 基于递归最小二乘的单通道混合信号时延估计算法[J]. *电子测量与仪器学报*, 2021, 35(3): 197-203.
PAN F, WANG CH L, ZHAO CH. Single-channel mixed-signal delay estimation algorithm based on recursive least squares [J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrumentation*, 2021, 35(3): 197-203.
- [9] 于晓辉,张志成,李新波,等. 基于状态空间模型的指数衰减正弦信号参数估计[J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2019, 49(6): 2083-2088.
YU X H, ZHANG ZH CH, LI X B, et al. Parameter estimation of exponentially decayed sinusoidal signals based on state space models [J]. *Journal of Jilin University (Engineering Edition)*, 2019, 49(6): 2083-2088.
- [10] HUANG C. A combined invariant-subspace and subspace identification method for continuous-time state-space models using slowly sampled multi-sine-wave data[J]. *Automatica*, 2022, 140: 1-10.
- [11] 张泽,陈辉,王永良. 空时二维线性预测谱估计算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2019, 41(9): 1937-1944.
ZHANG Z, CHEN H, WANG Y L. Space-time two-dimensional linear prediction spectrum estimation algorithm [J]. *Systems Engineering and Electronic Technology*, 2019, 41(9): 1937-1944.
- [12] 邹学玉,袁延秀,熊杰. 基于粒子滤波的短时正弦信号相位参数估计[J]. *长江大学学报(自科版)*, 2017, 14(9): 13-16, 37, 3.
ZOU X Y, YUAN Y X, XIONG J. Phase parameter estimation of short-time sinusoidal signal based on particle filter[J]. *Journal of Yangtze University (Self-Science Edition)*, 2017, 14(9): 13-16, 37, 3.
- [13] 池招招,蒋军成,刁旭,等. 基于声波衰减模型对液体管道泄漏位置的极大似然估计[J]. *振动与冲击*, 2021, 40(15): 238-245.
CHI ZH ZH, JIANG J CH, DIAO X. Maximum likelihood estimation of leakage location of liquid pipeline based on acoustic attenuation model[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, 40(15): 238-245.
- [14] 陈文礼,何蓓,郑可,等. 加窗插值 FFT 与 ESPRIT 结合方法的动态负荷电能计量[J]. *电力系统及其自动化学报*, 2019, 31(2): 14-18, 31.
CHEN W L, HE B, ZHENG K, et al. Dynamic load energy metering based on the combination of windowed interpolated FFT and ESPRIT [J]. *Journal of Electric Power System and Automation*, 2019, 31(2): 14-18, 31.
- [15] SANTOS E, KHOSRAVY M, LIMA A M, et al. ESPRIT associated with filter bank for power-line harmonics, sub-harmonics and inter-harmonics parameters estimation [J]. *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, 2020, 118: 1-14.
- [16] 师俊朋,文方青,艾林,等. 空域色噪声背景下双基地 MIMO 雷达角度估计[J]. *系统工程与电子技术*, 2021, 43(6): 1477-1485.
SHI J P, WEN F Q, AI L, et al. Angle estimation of bistatic MIMO radar under spatial colored noise background [J]. *Systems Engineering and Electronic Technology*, 2021, 43(6): 1477-1485.
- [17] BROWN K I, WELLS J J. Comparison of modelled pursuits with ESPRIT and the matrix pencil method in the modelling of medical percussion signals[J]. *Biomedical Signal Processing and Control*, 2024, 89: 1-8.
- [18] YUE Y, XU Y. Root high-order cumulant MUSIC[J]. *Digital Signal Processing*, 2022, 122: 1-9.
- [19] 邢传玺,万志良,姜思源,等. 水声信号稀疏重构的高阶累积量波达方向估计[J]. *声学学报*, 2022, 47(4): 440-450.
XING CH X, WAN ZH L, JIANG S Y, et al. High order cumulant direction of arrival estimation for sparse

reconstruction of underwater acoustic signals [J].
Journal of Acoustics, 2022, 47 (4): 440-450.

- [20] 单泽彪, 鲁胜麟, 刘小松, 等. 基于高阶累积量的阵列式超声波传感器风速风向测量[J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(6): 279-286.

SHAN Z B, LU SH L, LIU X S, et al. Wind speed and direction measurement of array ultrasonic sensors based on high-order cumulant[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 42(6): 279-286.

作者简介



单泽彪, 2016 年于吉林大学获得博士学位, 现为长春理工大学讲师、硕士生导师, 长春气象仪器研究所博士后, 主要研究方向为弱信号检测、阵列信号处理以及压缩感知技术。

E-mail: zbshan@126.com

Shan Zebiao received his Ph. D. degree from Jilin University in 2016. Now he is a lecturer and master supervisor at Changchun University of Science and Technology, and a postdoctoral fellow at Changchun Institute of Meteorological Instruments. His main research interests include weak signal detection, array signal processing and compressed sensing technology.



徐恩达, 2021 年于长春理工大学获得学士学位, 现为长春理工大学硕士研究生, 主要研究方向为微弱信号检测、检测技术与自动化装置。

E-mail: 1569204824@qq.com

Xu Enda received his B. Sc. degree from Changchun University of Science and Technology in 2021. Now he is a M. Sc. candidate at Changchun University of Science and Technology. His main research interests include weak signal detection, detection technology and automatic equipment.



刘小松 (通信作者), 2016 年于吉林大学获得博士学位, 2022 年博士后出站, 现为长春理工大学讲师、硕士生导师, 主要研究方向为信息感知与先进控制技术、复杂系统建模、仿真与控制。

E-mail: liuxs@cust.edu.cn

Liu Xiaosong (Corresponding author) received her Ph. D. degree from Jilin University in 2016, and then worked as a postdoctoral fellow until 2022. Now she is a lecturer and master supervisor at Changchun University of Science and Technology. Her main research interests include information perception and advanced control technology, modeling, simulation and control of complex systems.