DOI: 10. 13382/j. jemi. B2206131

一种鲁棒的 2D 激光雷达和摄像机最小解标定方法*

彭　梦　邬书跃　陈　龙　李卓凡
（湖南工程学院计算机与通信学院　湘潭　411104）

摘　要：因为 P3P 问题固有的结构缺陷，二维激光雷达和摄像机的最小解标定方法存在数值稳定性差、精度较差等问题。针对上述问题，本文提出了一种鲁棒的最小解标定方法，对 P3P 问题的求解算法和最优解选择误差度量进行改进。首先，根据 3 个棋盘格构建的 P3P 问题，利用改进的 RP3P 算法进行求解，提高了解的稳定性。然后，基于可信度加权观测概率设计了一种的最优解选择策略，提高了所选解的准确性。根据实验结果可知，本文的算法在标定结果的精度和有效性上得到明显改善。仿真实验中，在不同噪声水平下，相比于 Francisco 方法和 Hu 方法，本文方法的有效解概率提高了 5%～41%和 2%～20%，旋转矩阵精度提高了 2°～6°和 1. 5°～2°，平移向量精度提高了 180～520 mm 和 150～180 mm，性能提高明显。

关键词：智能交通；2D 激光雷达；P3P 问题；外参数标定；RP3P 算法；可信度加权
中图分类号：TN958；TN911　　**文献标识码**：A　　**国家标准学科分类代码**：510. 99

Robust minimum solution calibration method of 2D Lidar and camera

Peng Meng　Wu Shuyue　Chen Long　Li Zhuofan
（School of Computer and Communication, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411104, China）

Abstract: Because of the inherent structural defects of P3P problem, the minimum solution method for calibration of 2D Lidar and camera has some shortcoming, such as poor numerical stability and accuracy. Aiming at the above problem, this paper proposes a robust minimum solution calibration method, which improves algorithm of P3P problem and the error measurement of optimal solution selection. Firstly, according to the P3P problem constructed by three checkerboards, the enhanced RP3P algorithm is used which can improve the stability of the solution. Secondly, an optimal solution selection strategy based on observation probability with uncertainty weighted is designed to improve the accuracy of the optimal solution. Experimental results show that the proposed algorithm can significantly improve the probability of reasonable solution and calibration accuracy compared with the algorithms in the literature. Under different noise levels, compared with Francisco method and Hu method, the probability of reasonable solution is improved by 5%～41% and 2%～20%, the rotation matrix accuracy is improved by 2°～6° and 1. 5°～2°, the translation vector accuracy is improved by 180～520 mm and 150～180 mm, so the performance is improved obviously.

Keywords: intelligent transportation; 2D Lidar; P3P problem; extrinsic calibration; RP3P algorithm; reliability weight

0　引　言

高分辨率相机和二维激光雷达经常被结合在移动设备中用于实现路径规划、语义地图、目标检测与跟踪等功能[1-3]。激光雷达获取的是外部环境空间点云的三维位置信息，而摄像机获取的是可见光的平面投影成像信息，为了充分利用两个传感器的优势，需要两个传感器进行数据融合。然而，由于相机和二维激光雷达之间难以精确安装和对准，因此需要标定两个传感器之间的外部参数，即激光雷达和摄像机坐标系之间的旋转和平移。

Zhang 等[4]最早提出了一种使用棋盘图案的 2 维激

收稿日期：2022-12-17　　Received Date：2022-12-17
＊基金项目：国家自然科学基金（62173134，62006075）、湖南省自然科学基金（2023JJ50030，2023JJ50226）、湖南工程学院校级项目（YY1711，XJ1605）资助

光雷达和摄像机标定方法,该方法使用点面对应关系,可以从至少 5 个平面输入线性求解外部参数。然而,这种方法的线性解不能保证标定结果的可靠性,解的精度较差。在文献[4]的基础上,Francisco 等[5]提出了一个外参数标定的最小解决方案。将外参数标定公式化为对偶三维空间中的透视三点(perspective three points, P3P)问题。该方法将将棋盘格的观测输入个数从 5 次减少到 3 次,以简化标定流程。然而,该方法存在多解问题,此外它还存在两种退化情况,即两个平面平行情况和危险的圆柱体情况。

同样利用棋盘格,胡钊政等[6]通过引入了平面成像区域约束,从多解中选择最优解,提高了解的可靠性,彭梦等[7]提出了一种新的标定方法,利用观测概率有效下界选择可信的多个候选解作为最优解的优化初始值,提高了初始值的有效性。除了棋盘格以外,还有文献使用标定参照物上的直线、平面、圆圈等几何特征建立外参数约束实现标定。例如 Hoang 等[8]利用标定参照物上的直线特征建立外参数等式,该方法对噪声比较敏感,实际标定结果精度较低。Ye 等[9]基于直线特征提出了一种新的标定方法,该方法结合利用点线约束和欧氏变换不变性约束可以获得更准确、更有效的外部参数。Dong 等[10]利用带有两个棋盘格的折叠三角板作为的标定物,构建出 6 个激光点到平面的等式约束来实现标定。Itami 等[11]通过激光雷达捕捉固定在手持杆上的小球形物体,从而获取相机和激光雷达两个坐标系之间的点对应关系,求解外部参数。Fan 等[12]提出通过将摄影测量控制场作为公共参考系,通过相机和激光雷达分别独立相对控制场进行标定,从而实现两个传感器之间标定。Chen 等[13]基于四面体的直线特征,根据激光点在直线上的空间约束实现标定。

另外,利用自然场景作为标定参照物的自标定方法也是主流研究方向。Zhou 等[14]利用道路边缘的直线特征,提出基于点线约束的自标定方法。Gomez[15]利用房间墙角做为参照物,利用 3 个墙面正交特性分别构建相机相对于墙角坐标系的外部参数和激光雷达相对于墙角坐标系的外部参数,然后对相机和激光雷达进行标定。Hu 等[16]进一步扩展了文献[15]的工作,从单输入观测得到了一个最小解,该解需要进行两次标定过程,包括三面体与 LRF 的标定和三面体与相机的标定。上述自标定方法由于同样需要外部观测物作为参照物来构建两个坐标系之间的关系,因此精度和稳定性都严重依赖提取的人工环境几何特征的精确性,存在环境适应性差、标定精度不高等缺点。彭湃等[17]提出一种结合里程计的自标定方法。该方法不需要自然或者人工参照物,但是性能取决于云匹配算法精准度,稳定性差。

相比较其他标定方法,基于棋盘格最小解标定方法采用棋盘格参照物建立几何关系[4-7],基于旋转群约束求解旋转矩阵,因此在精度和可靠性等性能上面更优。但是最小解标定方法存在以下 3 个局限性:1)缺失解问题。P3P 问题解的本质将是对一元四次方程的求解。基于观测值估计的四次多项式和真实的四次多项式之间存在一定的差异,当观测值的量测噪声较大时会出现解缺失问题。2)奇异情况下的几何退化问题。不稳定的几何结构会导致解的奇异性[18],其中 P3P 问题的透视中心位置的微小变化会导致结果出现巨大误差。特别在“危险圆柱”的情况下,最小解标定结果非常不可靠。3)误差度量问题。由于最小解标定方法会获取多个解,为此该类方法通常根据激光点的观测误差来评价每个解偏离实际值程度,从而获取最优解。然而,这种误差度量通常是计算所有激光点的误差平方和,没有考虑不同姿态棋盘格对误差值影响的差异。

针对最小解标定方法的上述不足,本文提出了一种鲁棒的最小解标定方法,通过改进 P3P 问题的求解算法和改进多解误差度量,提高了标定结果的稳定性。首先,根据 3 个棋盘格建立 P3P 问题,本文利用文献[18]的 RP3P 算法求解 P3P 问题,通过简化计算获取更高精度三维控制点的深度。其次,本文通过对 P3P 问题的多项式方程极值点进行计算,将受量测噪声干扰而丢失的解重新获取回来。最后,针对多解的误差度量问题,本文提出一种基于可信度权重的观测概率,根据激光量测的可信度计算解的观测概率,选择观测概率最大的解作为最优解。

本文标定方法的优点如下:1)使用了更鲁棒的 RP3P 算法,提高了标定结果的稳定性。2)能重新获取测量噪声引起的缺失解,标定结果更准确。3)提高了误差度量模型的鲁棒性,为计算各个解偏离实际值的程度提供了更可靠的度量。

1　问题描述

二维激光雷达和摄像机坐标系变换如图 1 所示。三维空间点的坐标在摄像机坐标系{C}表示为 $\boldsymbol{p}^{c}$,在激光雷达坐标系{L}表示为 $\boldsymbol{p}^{l}$,在棋盘格坐标系{W}表示为 $\boldsymbol{p}^{w}$,$\boldsymbol{p}^{c}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}^{l}+\boldsymbol{t}$,$\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 为摄像机坐标系和激光雷达坐标系之间的旋转矩阵和平移向量。$\boldsymbol{\Phi}_i$ 和 $\boldsymbol{\Delta}_i$ 为通过摄像机标定程序已获取的棋盘格坐标系到摄像机坐标系的旋转矩阵和平移向量,$\boldsymbol{p}^{c}=\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{p}^{w}+\boldsymbol{\Delta}_i$,其中 i 为棋盘格的观测样本序号。最小解标定方法的基本原理是利用 3 个棋盘格平面 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 和对应的 3 条激光扫描直线 $\boldsymbol{L}_i^{l}$ 建立三点透视问题,计算外参数 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{t}$。

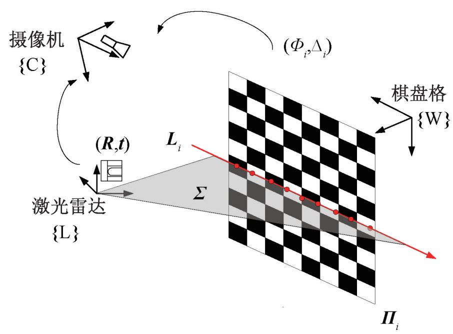


图 1 基于棋盘格的 2 维激光雷达和摄像机标定示意图

Fig. 1 Schematic diagram of calibration of 2D Lidar and camera based on checkerboard

2 文本的标定方法

针对最小解标定方法的上述不足，本文对最小解标定中的 P3P 问题求解算法和多解问题误差度量进行了改进，提出了一种鲁棒可靠的最小解标定方法。该方法首先基于改进 RP3P 算法计算出外参数的多个解，然后提出基于可信度权重的观测概率，选择多解中观测概率最大的作为最优解，从而提高了标定的精度和可靠性。

2.1 基于改进 RP3P 算法的外参数求解算法

在传统最小解标定方法中，P3P 问题求解存在两个重要不足，即噪声干扰下的解丢失问题和奇异情况下的几何退化问题。为了提高标定结果的数值稳定性和精度，本文标定方法在文献[6]所提出的最小解算法基础上，对 P3P 问题求解进行两个改进：利用 RP3P 算法求解 P3P 问题，提高了几何退化情况下解的稳定性；利用多项式极值点估计 RP3P 算法的缺失解，提高了 RP3P 算法的抗噪声干扰能力。

由于 3 个平面有且仅有一个交点（不包括三平面共线等特殊情况），最小解标定方法根据 3 个棋盘格平面 $\boldsymbol{\Pi}_1$、$\boldsymbol{\Pi}_2$、$\boldsymbol{\Pi}_3$ 和激光扫描直线 $\boldsymbol{L}_1$、$\boldsymbol{L}_2$、$\boldsymbol{L}_3$ 构建一个 P3P 问题。本文利用 RP3P 算法求解 P3P 问题，实现参数标定[18]。如图 2 所示，假设 3 个棋盘格平面 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 的公共交点是 O'，3 个平面棋盘格平面 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 两两相交产生 3 组相交直线 $\boldsymbol{\Gamma}_1$、$\boldsymbol{\Gamma}_2$、$\boldsymbol{\Gamma}_3$，3 条激光扫描直线 $\boldsymbol{L}_i$ 两两相交产生 3 个交点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$。如图 3 所示，3 条直线 $\boldsymbol{\Gamma}_i$ 两两之间的夹角分别为 α、β、γ，3 个交点 $\boldsymbol{P}_i$ 两两之间的距离分别为 d_1、d_2、d_3，公共交点 O' 分别与 3 个控制点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 之间的距离分别为 l_0、l_1、l_2，因此通过余弦定理获得 P3P 问题的标准方程组，如式(1)所示。其中的未知变量是 l_0、l_1、l_2，其他变量均为已知。

$$\begin{cases} l_0^2 + l_1^2 - 2l_0 l_1 \cos\beta = d_1^2 \\ l_0^2 + l_2^2 - 2l_0 l_2 \cos\alpha = d_2^2 \\ l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos\gamma = d_3^2 \end{cases} \tag{1}$$

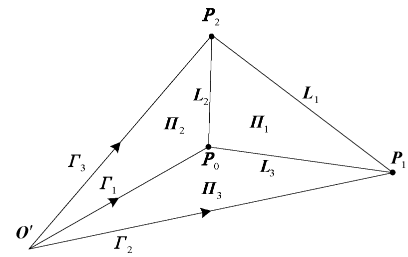


图 2 3 个棋盘格平面构造的 P3P 问题

Fig. 2 P3P problem constructed by three checkerboard

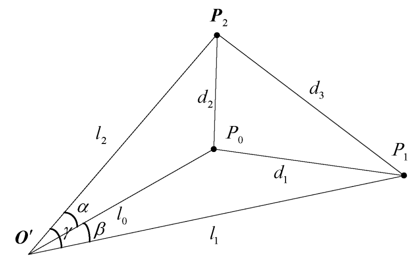


图 3 P3P 问题的余弦标准形式

Fig. 3 Cosine standard form of P3P problem

相比传统最小解标定算法[5-6]，本文利用文献[18]的 RP3P 算法求解 P3P 问题，获取式(1)的 3 个未知变量 l_0、l_1、l_2。RP3P 算法利用两个辅助变量进行消元，将式(1)的三元二次方程组转化为一元四次多项式方程求解，通过简化计算过程获得更精确的三维控制点的深度，具体计算过程如下。

1）引入两个辅助变量 t_1 和 t_2，将 P3P 问题的标准方程式(1)转化为式(2)。其中辅助变量 $t_1 = l_1 - l_0 c_1$，$t_2 = l_2 - l_0 c_0$。

$$\begin{cases} l_0^2 \cdot \sin^2\beta + t_1^2 = d_1^2 \\ l_0^2 \cdot \sin^2\alpha + t_2^2 = d_2^2 \\ t_1^2 + t_2^2 + l_0 A_3 t_1 + l_0 A_4 t_2 + A_5 t_1 t_2 + l_0^2 A_6 = d_3^2 \end{cases} \tag{2}$$

在式(2)中的各个系数分别为：

$c_0 = \cos\alpha$

$c_1 = \cos\beta$

$c_2 = \cos\gamma$

$A_3 = 2(c_1 - c_0 c_2)$

$A_4 = 2(c_0 - c_1 c_2)$

$A_5 = -2c_2$

$A_6 = c_0^2 + c_1^2 - 2c_0 c_1 c_2$

2）将式(2)中的未知变量进行替换，并进行一次消

元可得下二元二次方程组式(3)，τ 和 ξ 为替换后的未知变量，$\tau = \frac{t_1}{l_0}, \xi = \frac{t_2}{l_0}$。

$$\begin{aligned} & A_1 \cdot \tau^2 - \xi^2 + A_2 = 0 \\ & A_3 \cdot \tau + A_4 \cdot \xi + A_5 \cdot \tau \cdot \xi + A_9 \cdot \tau + A_{10} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

其中，式(3)中的各个系数分别为：

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{k}$$

$$A_1 = k^2$$

$$A_2 = A_1 \cdot \sin^2\beta - \sin^2\alpha$$

$$A_7 = A_6 - \sin^2\alpha$$

$$A_8 = \frac{d_3^2 - d_2^2}{d_1^2}$$

$$A_9 = 1 - A_8$$

$$A_{10} = A_7 - A_8 \cdot \sin^2\beta$$

3)然后，接着对式(3)再进行一次消元可得式(4)。对式(4)中变量 τ 进行求解，可最多获得 4 个解。

$$B_4 \cdot \tau^4 + B_3 \cdot \tau^3 + B_2 \cdot \tau^2 + B_1 \cdot \tau + B_0 = 0 \tag{4}$$

其中，式(4)中的各个系数分别为：

$$B_4 = A_9^2 - A_1 A_5^2$$

$$B_3 = 2A_3A_9 - 2A_1A_4A_5$$

$$B_2 = A_3^2 + 2A_9A_{10} - A_2A_5^2 - A_1A_4^2$$

$$B_1 = 2A_3A_{10} - 2A_2A_4A_5$$

$$B_0 = A_{10}^2 - A_2A_4^2$$

4)最后，将变量 τ 的解依次代回到式(3)，可以最多获得关于 $\{l_0, l_1, l_2\}$ 的 4 组解，如式(5)所示。由于本文中的 P3P 问题没有要求深度值为正值的约束，每个 $\{l_0, l_1, l_2\}$ 的解都有一个对称解 $\{-l_0, -l_1, -l_2\}$，因此总共最多有 8 组解。

$$\begin{cases} l_0 = \dfrac{d_1}{\sqrt{\tau^2 + \sin^2\beta}} \\ l_1 = l_0 l'_1 = l_0(c_1 + \tau) \\ l_2 = l_0 l'_2 = l_0(c_0 + \xi) \\ \xi = -\dfrac{A_9 \cdot \tau^2 + A_3 \cdot \tau + A_{10}}{A_5 \cdot \tau + A_4} \end{cases} \tag{5}$$

至此，通过上述 RP3P 算法完成了 P3P 问题求解，计算出 3 个控制点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 到顶点 O' 的距离 l_0、l_1、l_2，并计算 3 个控制点在摄像机坐标系中的坐标值 $\boldsymbol{Q}_0$、$\boldsymbol{Q}_1$、$\boldsymbol{Q}_2$，如式(6)所示。已知 3 个控制点分别在两个坐标系中的值，计算坐标系之间的外参数 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 是一个典型的三点匹配估计运动问题，因此利用文献[6]的姿态估计算法可直接计算外参数 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{t}$。

$$\boldsymbol{Q}_i = l_i \boldsymbol{\Gamma}_i + \boldsymbol{O}' \tag{6}$$

但是，RP3P 算法存在真解丢失问题。由于量测噪声的存在，对于式(4)而言，利用样本测量值导出的四次多项式 $\boldsymbol{f}_{measured}$ 和真实值导出的四次多项式 $\boldsymbol{f}_{true}$ 之间会有一定的差异，当这种差异较大时很可能丢失解，也就是说噪声干扰会造成缺解问题(如图 4 中 x'_3 所示)。缺解问题是由 P3P 的固有结构决定的，所有 P3P 求解方法也有同样的问题。针对 RP3P 算法的缺解问题，本文将利用 $\boldsymbol{f}_{measured}$ 的极值点来估计式(4)中可能的缺失解，从而找回可能丢失的解，具体步骤如下。

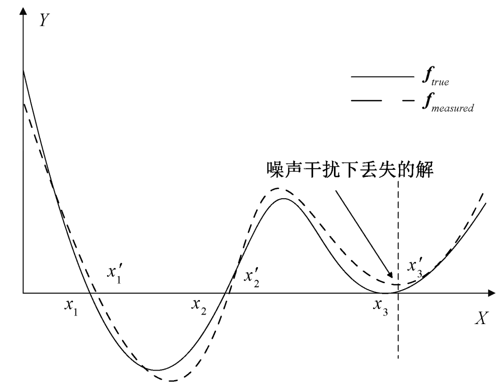


图 4　噪声干扰造成缺解问题的示意图

Fig. 4　Description diagram of missing solution caused by noise interference

首先，设式(4)对应的多项式 $\boldsymbol{f}_{measured}$ 为 $f(\tau)$(式(7))。如式(8)所示，求 $f(\tau)$ 一阶导数得到一个三次多项式 $f'(\tau)$，因此由 $f'(\tau) = 0$ 得出 $f(\tau)$ 最多有 3 个极值点 $\tau_i(i \leqslant 3)$。然后，利用 $f(\tau)$ 的二阶导数 $f''(\tau)$ 判断极值点 τ_i 是极小值点还是极大值点。如果 τ_i 是极小值点即 $f''(\tau_i) > 0$ 且 $f(\tau_i) > 0$，或者如果 τ_i 是极大值即 $f''(\tau_i) < 0$ 点且 $f(\tau_i) < 0$，则 τ_i 可能是缺失解。通过 $\boldsymbol{f}_{measured}$ 的极值点，将所有可能的缺失解都并入到 P3P 问题的多解集合。

$$f(\tau) = B_4 \cdot \tau^4 + B_3 \cdot \tau^3 + B_2 \cdot \tau^2 + B_1 \cdot \tau + B_0 \tag{7}$$

$$\begin{cases} f'(\tau) = 4B_4 \cdot \tau^3 + 3B_3 \cdot \tau^2 + 2B_2 \cdot \tau + B_1 \\ f''(\tau) = 12B_4 \cdot \tau^2 + 6B_3 \cdot \tau + 2B_2 \end{cases} \tag{8}$$

2.2　基于可信度加权观测概率的最优解选择策略

通过 2.1 节内容，得到了标定参数的多个解，需要从多解中选择一个最优解。然而，已有文献没有考虑观测数据在空间的分布不均造成的不同观测数据可信度的差异，容易错选假解[19]。针对这一问题，借鉴文献[20]的思想，本文提出基于可信度加权观测概率的最优解选择策略，该方法利用观测数据的可信度对解的观测概率进行加权，对候选解集合元素进行评价从而选出最优解。该方法通过抑制观测概率的可信度，提高了最优解选择

机制的可靠性。具体步骤分为如下 3 步：

首先，计算解在单个棋盘格上的观测概率。基于噪声的高斯分布假设，根据观测数据的误差值计算候选解 $(\boldsymbol{R}_j,\boldsymbol{t}_j)$ 在棋盘格的观测观测概率 $\pi_{j,i}$（式(9)），并且对 $\pi_{j,i}$ 归一化（式(10)），其中 $j=1,2,\cdots,M$（M 是解的个数）；$i=1,2,\cdots,N$（N 是棋盘格的个数）。$\boldsymbol{d}_{j,i}$ 为解 $(\boldsymbol{R}_j,\boldsymbol{t}_j)$ 在第 i 个棋盘格的激光点误差向量，如式(11)所示，其中 k 表示棋盘格 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 上激光点的序号，$\boldsymbol{N}_i$ 表示 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 的法线向量，$\boldsymbol{N}_i$ 的方向为摄像机坐标系中 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 的法线方向，$\|\boldsymbol{N}\|$ 大小为摄像机坐标系原点到平面 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 的距离。

$$\pi_{j,i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\exp\left(\frac{|\boldsymbol{d}_{j,i}|^2}{2\delta^2}\right)\tag{9}$$

$$\pi_{j,i}=\frac{\pi_{j,i}}{\sum_{t=1}^{M}\pi_{t,i}}\tag{10}$$

$$\boldsymbol{d}_{j,i}=\sum_k\left\|\left(\frac{(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i)\cdot(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i-\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t})}{(\boldsymbol{R}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_i)\cdot\boldsymbol{P}_{ik}^{1}}-1\right)\boldsymbol{P}_{ik}^{1}\right\|\tag{11}$$

然后，计算每个棋盘格观测概率的可信度。本文根据解集合的空间分布计算观测概率的可信度，β_i 是第 i 个棋盘格上观测概率的可信度（式(12)）。β_i 反映了观测概率值的峰值尖锐度量，表示解集合观测概率的空间分散程度。如果 β_i 越大，表示观测概率高的解越接近分布在最大观测概率的邻域内，那么可信度越大，反之亦然。其中 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 表示第 i 个棋盘格上具有最大观测概率的旋转矩阵，$\|\cdot\|_{Fro}$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

$$\beta_i=\frac{1}{\sum_{j=1}^{M}\pi_{j,i}\|\boldsymbol{R}_j-\hat{\boldsymbol{R}}\|_{Fro}^{2}},\quad i=1,2,\cdots,N\tag{12}$$

最后，本文通过加权后的观测概率对多解优劣进行度量（式(13)），选择观测概率最大的解作为最优解。本文利用棋盘格可信度 β_i 给第 i 个棋盘格的观测概率 $\pi_{j,i}$ 赋予权重，给可信度大的棋盘格上数据赋予较高的权重，从而抑制多个棋盘格观测概率之间冲突。

$$\pi_j=\prod_{i=1}^{N}(\pi_{j,i})^{\beta_i}\tag{13}$$

2.3　本文标定方法

综合 2.1 和 2.2 节对最小解方法中 P3P 求解算法和多解误差度量的改进，在文献[6]的基础上，本文提出了一种鲁棒可靠的最小解标定方法，具体的算法步骤如下。首先，根据 3 个棋盘格平面构建一个 P3P 问题，利用 RP3P 算法求解 P3P 问题，并且通过多项式极值点获取丢失的解。然后，根据各个棋盘格激光数据的可信度来计算多解的观测概率。最后，选择加权观测概率最大的解作为最优解。算法伪代码如算法 1 所示。

算法 1 本文的标定方法流程

Input：棋盘格 $\boldsymbol{\Pi}_i$ 和棋盘格上激光点拟合的直线 $\boldsymbol{L}_i^1$，$i=1,2,\cdots,N$。

Output：旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和平移向量 $\boldsymbol{t}$。

1. 任选 3 个观测数据的组合集 $\boldsymbol{K}=\{k_1,\cdots,k_T\}$ $(T=C_N^3)$，其中 $k_i\in\mathbb{Z}^3$ 表示从 $\{1,2,\cdots,N\}$ 中选取 3 个整数数组合，集合 $\boldsymbol{K}$ 是所有组合的集合。
2. 设置解集合 D 为空集 ϕ。
3. For $t=1,\cdots,T$ do
4. 选择 k_t 对应的 3 个棋盘格平面 $\boldsymbol{\Pi}_{k_{t,1}}$、$\boldsymbol{\Pi}_{k_{t,2}}$ 和 $\boldsymbol{\Pi}_{k_{t,3}}$ 以及对应的激光扫描线 $\boldsymbol{L}_{k_{t,1}}^1$、$\boldsymbol{L}_{k_{t,2}}^1$ 和 $\boldsymbol{L}_{k_{t,3}}^1$，利用 3 个棋盘格平面构建一个 P3P 问题的标准方程（式(1)）。
5. 基于 RP3P 算法，通过辅助变量和消元将式(1)转化为式(4)的一元四次方程求解，并利用式(7)~(8)计算极值点，从而获取式(4)的缺失解。
6. 获取 3 个控制点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 分别在摄像机坐标系和激光雷达坐标系中的值式(5)~(6)。通过步骤 5 和 6 将 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{t}$ 的求解变成一个典型三点匹配估计运动问题。
7. 针对三点匹配估计运动问题，利用文献[6]中的姿态估计算法计算旋转矩阵 $(\boldsymbol{R}_t^{(m)},\boldsymbol{t}_t^{(m)})$，$m<8$。
8. 将当前这组解合并到解集合 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\cup(\boldsymbol{R}_t^{(m)},\boldsymbol{t}_t^{(m)})$。
9. End for
10. 根据式(11)计算每个解在每个棋盘格上的误差向量 $\boldsymbol{d}_{j,i}$，并代入式(9)获取每个解的的单个棋盘格观测概率 $\pi_{j,i}$。
11. 根据式(12)度量单个棋盘格的观测概率可信度 β_i。
12. 根据式(13)，利用可信度计算加权观测概率，选择加权观测概率 π_j 最大的解 $(\boldsymbol{R}_j,\boldsymbol{t}_j)$ 作为最优解。

3　实验结果与分析

3.1　仿真实验

仿真实验中，将本文标定方法与文献[5]的 Francisco 方法、文献[6]的 Hu 方法的解析解进行比较。仿真实验采用理想理想的二维激光雷达模型和针孔摄像机模型，激光雷达的角度分辨率为 0.25°，角度范围为 −40° ~ +40°。激光雷达假设是静止的，并且针孔相机根据均匀分布随机放置在距离激光雷达半径为 3 ~ 6 m 的球形范围内。相机的放置使得两个传感器的视场之间总是有显著的重叠，将零均值高斯噪声添加到激光深度数据。本文主要使用旋转误差 e_R 和平移误差 e_t 两个指标来评价算法性能。e_R 表示标定结果 $\boldsymbol{R}$ 和真实值 $\boldsymbol{R}_r$ 之间旋转矩阵误差（式(14)），e_t 表示标定结果 $\boldsymbol{t}$ 和真实值 $\boldsymbol{t}_r$ 之间的平移向量误差（式(15)），其中 $\|\cdot\|_{Fro}$ 表示矩阵或者向量的 Frobenius 范数。

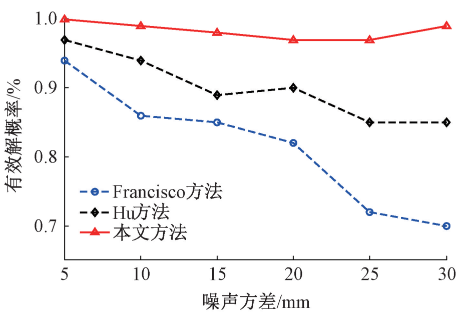
$$e_R=\frac{180}{\pi}\arccos\left(\frac{trace(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_r)-1}{2}\right)\tag{14}$$

$$e_t=\|\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_r\|\tag{15}$$

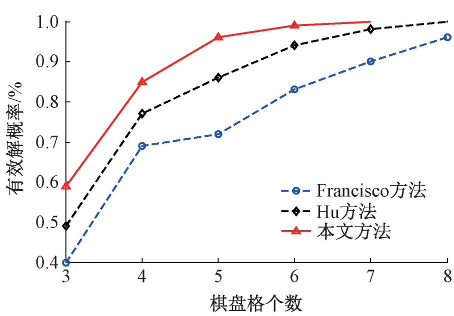
1）利用有效解概率评估不同算法的可靠性。当 e_R 小于 10° 且 e_t 小于 100 cm 时，可以认为该解为有效解，误差超出这个阈值的为无效解。有效解概率定义为标定结

果为有效解的实验数占总实验数的比例。因为有效解偏离真实值程度不大,可以作为合理的优化初始值,所以有效解概率能合理表示解的好坏程度。由于激光测距噪声会导致 Francisco 方法和 Hu 方法出现几何退化下的奇异解问题和缺失解问题,从而无法获取有效解。本文方法通过改进的 RP3P 算法提高了有效解概率。

首先,实验中随机输入 6 个棋盘格,将激光深度数据的噪声方差水平从 5 mm 逐渐增加至 30 mm,图像数据的噪声方差为 0.5 pixels。本文在不同的噪声水平下测试了 3 种标定方法,对于每个噪声水平进行 100 次试验来计算有效解概率。从图 5(a) 结果可得,在各个噪声水平下本文方法的有效解概率均保持在 97%左右。相比于 Francisco 方法和 Hu 方法,本文方法的有效解概率分别提升 5%～41%和 2%～20%。即使噪声方差为 30 mm 时,本文方法的有效解概率仍然保持 98%左右,明显高于其他算法。



(a) 不同的噪声方差下的有效解概率
(a) The ratio of reasonable solution under different variance of laser noise

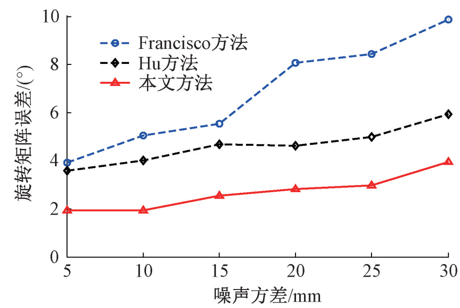


(b) 不同棋盘格输入个数下的有效解概率
(b) The ratio of reasonable solution under different number of chessboards

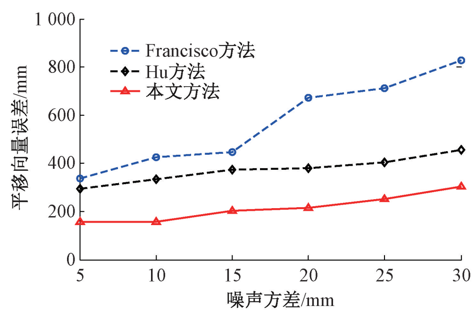
图 5　3 种方法的有效解概率对比分析
Fig. 5　Comparison of three methods of the reasonable solution ratio

然后,将随机输入棋盘格的个数从 3 个逐渐增加到 8 个,激光数据加上方差 20 mm 的高斯噪声,在不同棋盘格输入个数下分别进行 100 次实验来计算有效解概率。从图 5(b) 结果可得,本文方法的有效解概率整体上高于其他文献中的算法。相比 Francisco 方法,提高了 10%～50%的有效解概率。相比 Hu 方法,提高了 2%～20%的有效解概率。

2) 为了进一步验证算法的性能,在不同水平的噪声下利用误差均值和误差分布两个指标来进行误差分析。噪声水平、棋盘格个数、实验次数等参数设置与图 5(a) 相同。图 6 为误差均值分析,可以看出相比较 Francisco 方法,本文方法的旋转矩阵误差降低了 2°～6°,平移向量误差降低了 180～520 mm。相比 Hu 方法,本文方法的旋转矩阵误差降低了 1.5°～2°,平移向量误差降低了 150～180 mm。图 7 为误差分布分析,可以看出相比较其他方法,本文方法的结果分布在误差值更小的范围内,并且鲁棒性随着噪声水平的增加更加明显。综合图 6 和 7 的实验结果,表明在不同噪声方差下本文方法的标定精度均要好于其他两种方法。



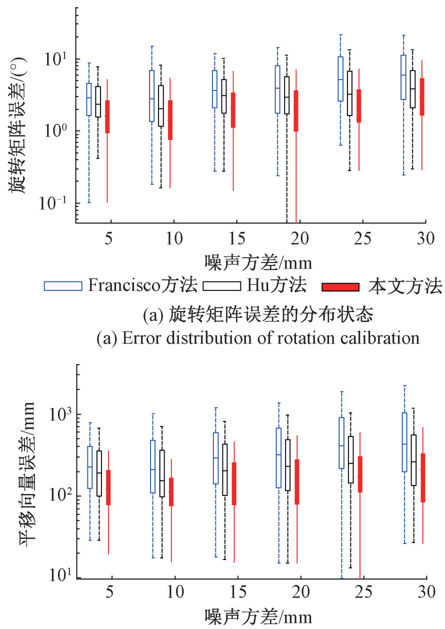
(a) 旋转矩阵的误差均值
(a) Mean error of rotation calibration



(b) 平移向量的误差均值
(b) Mean error of translation calibration

图 6　不同激光噪声方差下的标定误差均值比较
Fig. 6　Comparison of calibration mean error under different variance of laser noise

3) 将随机输入棋盘格的个数从 3 个逐渐增加到 8 个,在不同棋盘格输入个数下利用误差均值和误差分布两个指标来进行误差分析。激光数据加上方差 20 mm 的高斯噪声,不同棋盘格输入个数下均独立进行 100 次实验。图 8 为误差均值分析,可以看出当棋盘格输入个数为 3 时,相比于 Francisco 方法和 Hu 方法,本文方法的旋转矩阵精度分别提升了提高了 33°和 7°,平移向量精度分别提高了 6 m 和 0.5 m,性能提高非常大。当棋盘格输入个数为 4～8 之间时,相比于 Francisco 方法和 Hu 方法,本文方法的旋转矩阵精度分别提升 50%～65%和 20%～



(a) 旋转矩阵误差的分布状态

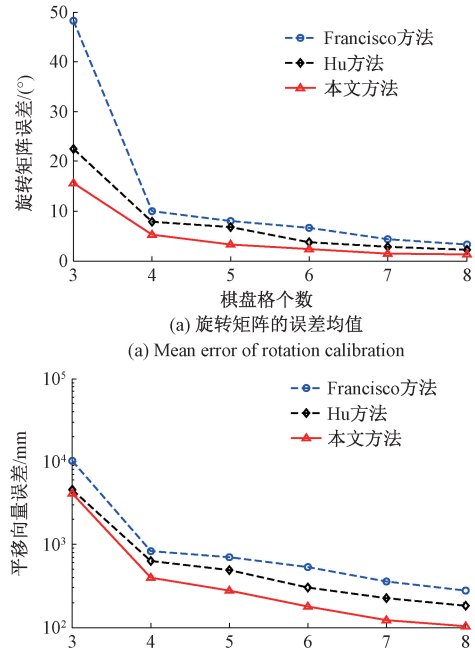
(a) Error distribution of rotation calibration

(b) 平移向量误差的分布状态

(b) Error distribution of translation calibration

图 7 不同激光噪声方差下误差值分布比较

Fig. 7 Comparison of calibration error distribution under different variance of laser noise



(a) 旋转矩阵的误差均值

(a) Mean error of rotation calibration

(b) 平移向量的误差均值

(b) Mean error of translation calibration

图 8 不同棋盘格输入个数下的标定误差均值比较

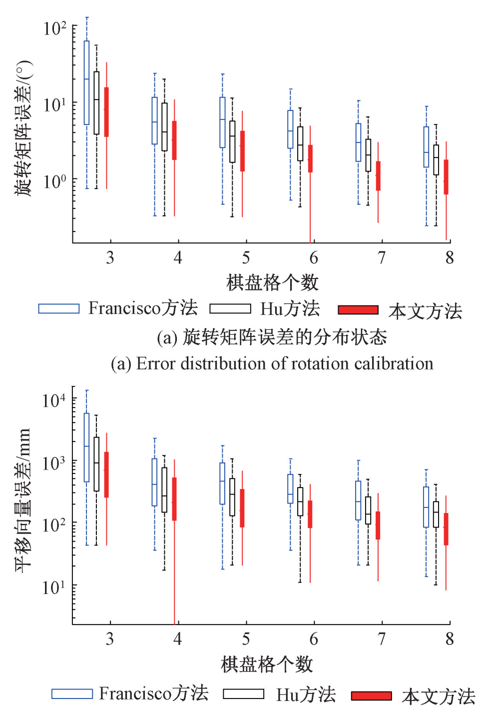
Fig. 8 Comparison of calibration mean error under different number of chessboards

45%,平移向量精度至少提高了一个量级。图 9 为误差分布分析,可以看出本文方法的误差分布稳定在一个较小的范围内,没有出现误差很大的解,数值稳定性更好。当输入棋盘格的数量较少时(3~4 个棋盘格),本文方法就能提供准确的标定结果,而其他算法需要 5~6 个棋盘格才能实现可靠的标定。

3.2 实际环境实验

实验中采用的激光雷达是上海思岚科技公司的 RPLIDAR A2M8 单线扫描激光雷达,扫描半径为 16 m。采用的摄像机是 Canon EOS200D,图像分辨率设置为 6 000 pixels×4 000 pixels。输入 4 个棋盘格的观测数据情况下,使用本文方法和文献[6] Hu 方法进行标定,通过将激光数据映射到成像平面上来验证标定结果。

图 10 显示了映射的图像,其中星号表示 Hu 方法映射的结果[6],圆圈表示本文方法映射的结果。明显可以看出,使用本文方法的激光点在棋盘格和墙面等平面上的投影非常接近,本文方法有更多的激光点投影在走廊墙面上的,投影结果更符合真实情况,更具有合理性。



(a) 旋转矩阵误差的分布状态

(a) Error distribution of rotation calibration

(b) 平移向量误差的分布状态

(b) Error distribution of translation calibration

图 9 不同棋盘格输入个数下标定误差分布比较

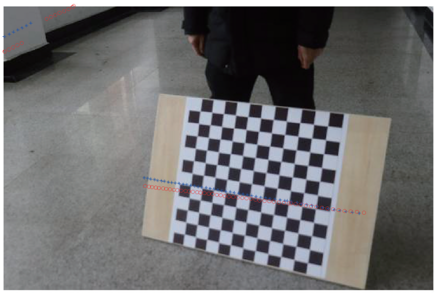
Fig. 9 Comparison of calibration error distribution under different number of chessboards

4 结 论

本文提出了一种鲁棒的最小解标定方法,对 P3P 问题的求解算法和解误差度量进行改进,提高了标定结果

(a) 第1幅图像中激光点的投影结果
(a) Projection result of laser point in the first image

(b) 第2幅图像中激光点的投影结果
(b) Projection result of laser point in the second image



(c) 第3幅图像中激光点的投影结果
(c) Projection result of laser point in the third image

(d) 第4幅图像中激光点的投影结果
(d) Projection result of laser point in the fourth image

图 10　激光点在图像上进行投影
Fig. 10　The laser point is projected on the image

的稳定性。主要贡献有两点：1）提出了基于改进 RP3P 算法的外参数求解方法。该方法利用 RP3P 算法求解 P3P 问题，提高几何退化情况下解的精度，并利用 P3P 问题多项式的极值点将缺失解重新获取回来，增强噪声扰动下解的稳定性。2）提出基于可信度加权观测概率的最优解选择策略，使用加权后的观测概率模型进行最优解选择，为评价各个解偏离真实值的程度提供了可靠度量。

通过仿真实验和真实实验，在有效解概率和标定精度上本文方法有明显提高。相比于 Francisco 方法和 Hu 方法，在不同棋盘格输入个数下，本文方法的有效解概率提高了 10%～50%和 2%～20%，旋转矩阵精度分别提升 50%～65%和 20%～45%，平移向量精度更是至少提高了一个量级。在不同噪声水平下，本文方法的有效解概率分别提升 5%～41%和 2%～20%，旋转矩阵精度提高了 2°～6°和 1.5°～2°，平移向量精度提高了 180～520 mm 和 150～180 mm，性能提高明显。进一步的研究工作将利用观测数据之间的运动信息构建适应性更强的约束，增强标定方法的鲁棒性和适应性。

参考文献

[1] SAKTHIVEL P, ANBARASU B. Integration of vision and LiDAR for navigation of micro aerial vehicle[C]. 2020 Third International Conference on Multimedia Processing, Communication & Information Technology (MPCIT). IEEE, 2020: 14-18.

[2] LI Z, GOGIA P C, KAESS M. Dense surface reconstruction from monocular vision and LiDAR[C]. 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). Montreal, QC, Canada: IEEE, 2019: 6905-6911.

[3] YANHAO L, HAO L. A collaborative relative localization method for vehicles using vision and LiDAR sensors[C]. 2020 16th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV). Shenzhen, China: IEEE, 2020: 281-286.

[4] ZHANG Q L, PLESS R. Extrinsic calibration of a camera and laser range finder (improves camera calibration) [C]. IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems. Sendai, Japan: IEEE, 2004: 2301-2306.

[5] FRANCISCO V, JOAOP B, URBANO N. A minimal solution for the extrinsic calibration of a camera and a laser-rangefinder[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2012, 34(11): 2097-2107.

[6] 胡钊政，赵斌，李娜，等. 基于虚拟三面体的摄像机与二维激光测距仪外参数最小解标定新算法[J]. 自动化学报，2015，41(11)：1951-1960.
HU ZH ZH, ZHAO B, LI N, et al. Minimal solution to extrinsic calibration of camera and 2D laser rangeflnder based on virtual trihedron[J]. Acta Automatica Sinica, 2015, 41(11): 1951-1960.

[7] 彭梦,万琴,陈白帆,等. 基于观测概率有效下界估计的二维激光雷达和摄像机标定方法[J]. 电子与信息学报,2022,44(7):2478-2487.
PENG M, WAN Q, CHEN B F, et al. A calibration method of 2D Lidar and a camera based on effective lower bound estimation of observation probability [J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2022,44(7): 2478-2487.

[8] HOANG V D, HERNÁNDEZ D C, JO K H. Simple and Efficient Method for Calibration of a Camera and 2D Laser Rangefinder [M]. Intelligent Information and Database Systems. Springer International Publishing, 2014.

[9] YE Q, SHU L, ZHANG W. Extrinsic calibration of a monocular camera and a single line scanning Lidar[C]. 2019 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA). Tanjing, China IEEE, 2019: 1047-1054.

[10] DONG W, ISLER V. A novel method for the extrinsic calibration of a 2D laser rangefinder and a camera[J]. IEEE Sensors Journal, 2018, 18(10):4200-4211.

[11] ITAMI F, YAMAZAKI T. A simple calibration procedure for a 2D LiDAR with respect to a camera[J]. IEEE Sensors Journal, 2019, 19(17):7553-7564.

[12] FAN J, HUANG Y, SHAN J, et al. Extrinsic calibration between a camera and a 2D laser rangefinder using a photogrammetric control field [J]. Sensors, 2019, 19(9):2030-2052.

[13] CHEN Z, YANG X, ZHANG C, et al. Extrinsic calibration of a laser range finder and a camera based on the automatic detection of line feature[C]. International Congress on Image Signal Processing. Datong, China: IEEE, 2016:448-453.

[14] ZHOU L, DENG Z. A new algorithm for the establishing data association between a camera and a 2-D LiDAR[J]. Tsinghua Science and Technology, 2014, 19(3): 314-322.

[15] GOMEZ R , BRIALES J , FERNANDEZ-MORAL E, et al. Extrinsic calibration of a 2D laser-rangefinder and a camera based on scene corners [C]. 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2015.

[16] HU Z, LI Y, LI N. Extrinsic calibration of 2-D laser rangefinder and camera from single shot based on minimal solution[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2016,65(4):915-929.

[17] 彭湃,耿可可,殷国栋,等. 基于传感器融合里程计的相机与激光雷达自动重标定方法[J]. 机械工程学报,2021,57(20): 206-214.
PENG P, GENG K K, YIN G D, et al. Automatic recalibration of camera and Lidar using sensor fusion odometry [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(20): 206-214.

[18] GENG Q, LIU W. Very robust direct solver of the P3P problem[C]. 2019 6th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI). Shanghai, China: IEEE, 2019, 1378-1382.

[19] 彭梦,陈白帆,邓作杰, 等. 2D 激光雷达和摄像机最小解标定的多解筛选及参数优化[J]. 仪器仪表学报, 2021,42(7):89-97.
PENG M, CHEN B F, DENG Z J, et al. Multi solution selection and parameter optimization for minimum solution calibration of 2D laser radar and camera[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021,42(7):89-97.

[20] 顾鑫,王海涛,汪凌峰,等. 基于不确定性度量的多特征融合跟踪[J]. 自动化学报,2011,37(5):550-559.
GU X, WANG H T, WANG L F, et al. Fusing multiple features for object tracking based on uncertainty measurement [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 37(5):550-559.

作者简介

彭梦(通信作者),2001 年于国防科技大学获得学士学位,2007 年于中南大学获得硕士学位,2015 年于中南大学获得博士学位,现为湖南工程学院讲师,主要研究方向为多传感器融合和视觉跟踪。

E-mail: pengmeng@hnie.edu.cn

Peng Meng (Corresponding author) received his B. Sc. degree in 2001 from National Defense University of Science and Technology, received his M. Sc. degree in 2007 from Central South University, received his Ph. D. degree in 2015 from Central South University. Now he is a lecturer in Hunan Institute of Engineering. His main research interests include multi sensor fusion and visual tracking.

邬书跃,1983 年于湖南科技大学获得学士学位,1988 年于国防科技大学获得硕士学位,2012 年于中南大学获得博士学位,现为湖南工程学院教授,主要研究方向为多传感器融合和数字信号处理。

E-mail: shuyuewu@163.com

Wu Shuyue received his B. Sc. degree in 1983 from Hunan University of Science and Technology, received his M. Sc. degree in 1988 from National Defense University of Science and Technology, received his Ph. D. degree in 2012 from Central South University. Now he is a professor in Hunan Institute of Engineering. His main research interests include multi sensor fusion and digital signal processing.