

DOI: 10.13382/j.jemi.B2104517

# 高斯过程改进的鲁棒容积卡尔曼滤波 及其组合导航应用\*

崔冰波 吉峰 孙宇 魏新华

(江苏大学 农业工程学院 镇江 212013)

**摘要:**基于GNSS/INS的导航状态估计受状态可观测度影响较大,为提高陆地载体航向角的估计精度,提出了一种改进鲁棒容积卡尔曼滤波(RCKF)方法。首先采用免重采样采样点更新框架实现容积点更新与高斯矩信息的解耦,提高采样点实例化信息在迭代滤波中的传播效率。其次基于状态可观测度分析,将高斯过程(GP)引入到系统模型矩估计积分不确定性的标定中,改善移动载体直线行驶条件下航向的估计精度。仿真实验表明,所提GP-RCKF算法能在状态可观测度较弱时显著改善航向角估计精度,航向角误差较RCKF改善28.9%。

**关键词:**组合导航;容积卡尔曼滤波;高斯过程;状态可观测度

**中图分类号:** TP391.8 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.8040

## Gaussian process enhanced robust cubature kalman filter and application in integrated navigation

Cui Bingbo Ji Feng Sun Yu Wei Xinhua

(School of Agricultural Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

**Abstract:** The observable degree of navigation state has a significant effect on the state estimation of GNSS/INS. In order to improve the accuracy of heading of land vehicle, an improved robust cubature Kalman filter (RCKF) method is proposed. First, the resampling-free sigma-point update framework is employed to separate the cubature point update from the Gaussian information limitation, so that improve the propagation efficiency of the information contained in instantiated points in the iteratively filtering period. Secondly, in order to improve the heading of land vehicle when it travels along a straight-line, the Gaussian process (GP) is introduced into the uncertainty calibration of moment approximation of system model based on state observability analysis. Simulation results indicate that GP-RCKF improves the heading angle obviously when the state observability is weak, and compared with RCKF the heading is improved by 28.9%.

**Keywords:** integrated navigation; cubature Kalman filter; Gaussian process; state observability

## 0 引言

基于双天线GNSS的农业机械导航易受环境遮挡和量测时滞影响,导航可靠性难以保证。组合导航是陆地载体复杂工况下无人驾驶的典型技术手段,其导航状态可观测度与载体轨迹密切相关。农业机械田间作业时多沿直线往返行驶,载体直线行驶时其航向角可观测性较弱,因此改善数据融合方法提高陆地载体航向角估计精度非常必要。

卡尔曼滤波(Kalman filter, KF)是组合导航常用数

据融合方法,基于KF框架研究人员相继提出了无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF)<sup>[1]</sup>、容积卡尔曼滤波(cubature Kalman filter, CKF)<sup>[2]</sup>以及高阶容积卡尔曼滤波<sup>[3]</sup>等非线性滤波方法。基于INS的组合导航状态维数一般较高,CKF在处理高维滤波时较UKF有更好的数值稳定性,然而CKF的采样点质量受状态维数影响较大,状态维数较高时存在非局部采样问题。基于KF框架的非线性滤波方法受时变噪声特征和系统建模误差影响显著<sup>[4-7]</sup>。系统模型噪声很难基于有限量测时域进行估计,Chang等<sup>[8]</sup>基于Huber方法实现GNSS/INS系统模型不确定性的抑制,李伟等<sup>[9]</sup>提出基于最大相关熵的自

收稿日期: 2021-07-12 Received Date: Received Date: 2021-07-12

\* 基金项目:国家自然科学基金(31901416)、江苏省自然科学基金(BK20180859)、中国博士后科学基金(2019M651745)项目资助

适应鲁棒高阶 CKF。上述方法采用有限采样点对状态概率密度函数(probability density function, PDF)进行逼近,忽略了积分运算的不确定性造成方差的乐观估计,尤其系统模型存在不确定度时,方差估计的一致性较弱进一步影响采样点生成的质量。

基于采样点可以匹配非线性函数前两阶矩的奇数阶和非高斯信息<sup>[10]</sup>,然而 CKF 采样点更新框架(sigma-point update framework, SUF)的两次重采样,破坏了函数实例化信息的传递。TIAN 等<sup>[11]</sup>基于矩匹配误差线性变换提出了一种新型 SUF,黄玉龙等<sup>[12]</sup>将量测似然函数的逼近误差引入后验采样点的更新过程,两种方法均对 SUF 的采样过程进行了直接修改。文献[13]将上述直接修改采样点的方法定义为免重采样 SUF。文献[14]将预测矩匹配误差变换用于 GNSS 信号频繁失锁时 GNSS/INS 组合导航,文献[15]采用 VB 和免重采样 SUF 级联处理 GNSS/INS 紧组合导航系统不确定性和时变量测噪声问题。免重采样 SUF 解决了高维状态维度与采样点生成的耦合问题,但其同样忽略了有限采样点进行积分变换的模型不确定性。

高斯过程(Gaussian process, GP)是一种数据驱动的非参数建模方法,可以用来逼近数值积分变换中的不确定性<sup>[16]</sup>。Ye 等<sup>[17]</sup>采用 GP 改善中心差分 KF 在 GNSS/INS 组合导航中的滤波效果,左朝阳等采用 GP 辅助中心差分 KF 解决 BDS/INS 存在模型不确定性系统精度下降问题<sup>[18]</sup>,它们均需状态参考轨迹完成模型训练。Pruher 等<sup>[19]</sup>提出一种基于采样点拟合的高斯过程求积分(Gaussian process quadrature, GPQ),可以标定积分运算的不确定性且不需要状态真值进行训练。本文利用文献[20]提出的导航系统可观测度分析方法,基于航向角可观测度分析,提出一种 GP 改进的鲁棒 CKF(GP-RCKF),改善 GP 辅助状态先验分布逼近的适应性,实验仿真验证了所提方法的有效性。

## 1 容积卡尔曼滤波

设 GNSS/INS 组合导航的离散系统模型可表示为:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{w}_{k-1} \in \mathbf{R}^n$  为系统状态和噪声;  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^p$ ,  $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}^p$  为系统量测和噪声; 系统函数和量测函数满足  $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ,  $h: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ ; 状态初始值  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$ ,  $\mathbf{w}_{k-1} \sim N(0, \mathbf{Q}_{k-1})$  及  $\mathbf{v}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k)$  为相互独立的高斯变量,  $\mathbf{Q}_{k-1} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{R}_k \in \mathbf{R}^{p \times p}$ 。设  $k-1$  时刻状态后验 PDF 为  $\mathbf{x}_{k-1} \sim N(\hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1})$ , 量测似然函数满足  $\mathbf{z}_k \sim N(\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}^z)$ ,  $k$  时刻状态后验 PDF 为  $\mathbf{x}_k \sim N(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$ , 则高

斯滤波框架下有:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1}) \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{k|k-1}^z \mathbf{K}_k^T \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1}^z (\mathbf{P}_{k|k-1}^z)^{-1} \quad (5)$$

采用三阶容积求积规则对式(3)~(5)中的高斯矩进行逼近可得:

$$\xi_i = \hat{\mathbf{x}}_{k-1|k-1} + \sqrt{n\mathbf{P}_{k-1|k-1}} [\mathbf{I}]_i \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i f(\xi_i) \quad (7)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i (f(\xi_i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(f(\xi_i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (8)$$

$$\zeta_i = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \sqrt{n\mathbf{P}_{k|k-1}} [\mathbf{I}]_i \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i h(\zeta_i) \quad (10)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^z = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i (h(\zeta_i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})(h(\zeta_i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T + \mathbf{R}_k \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1}^{xz} = \sum_{i=1}^{2n} \omega_i (f(\xi_i) - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})(h(\zeta_i) - \hat{\mathbf{z}}_{k|k-1})^T \quad (12)$$

其中,  $[\mathbf{I}]_i = \begin{cases} \mathbf{e}_i, & i = 1, \dots, n \\ -\mathbf{e}_{i-n}, & i = n+1, \dots, 2n \end{cases}$ ,  $\mathbf{e}_i \in \mathbf{R}^n$  表示

第  $i$  元素为 1 的单位列向量。采样点  $\xi_i$  和  $\zeta_i$  的分布对矩匹配效果影响较大,状态维数较高时式(6)和(9)产生的采样点存在非局部采样问题,造成状态先验 PDF 和似然函数矩估计精度下降。

## 2 高斯过程改进的状态预测

### 2.1 高斯过程

将系统模型和量测模型统一成:

$$\mathbf{y}_i = g(\mathbf{x}_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (13)$$

其中  $g: \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbf{R}^n$  表示由  $n \times n$  维实数空间到  $n$  维实数空间的映射,  $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim N(0, \sigma^2)$  为模型高斯噪声,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  为状态维数。设  $g(\mathbf{x}_i)$  满足 GP 模型  $gp(m(\mathbf{x}), k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j))$ , 其中  $m(\mathbf{x})$  表示模型均值, 不失一般性设其为 0,  $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  表示样本点  $\mathbf{x}_i$  与  $\mathbf{x}_j$  之间协方差函数, 其度量任意两样本点之间的相关性, 选择如下平方指数核函数:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \alpha^2 \exp\left(\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T \mathbf{A}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)\right) + \sigma_m^2 \delta_{ij} \quad (14)$$

式中:  $\alpha^2$  为核函数的方差;  $\mathbf{A}$  为核函数长度缩放因子构造的对角矩阵。采用共轭梯度法对核函数超参数集合  $\{\alpha^2, \mathbf{A}, \sigma_m^2\}$  进行拟合。设  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ , 构造样本点集  $\mathbf{D} = (\mathbf{X}, \mathbf{y})$  对  $\mathbf{y}_i$  值进行预测, 其输出形式为  $\mathbf{y} \sim N(0, K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \sigma^2 \mathbf{I})$ ,  $K(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  为  $n \times n$  阶对称正定协方差矩

阵,  $\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位阵。以样本点集外的容积点  $\mathbf{x}^*$  对函数  $g(\mathbf{x}_i)$  后验分布进行逼近可得:

$$m_g(\mathbf{x}) = E_g[g(\mathbf{x}) | \mathbf{D}] = \mathbf{k}^T(\mathbf{x}^*)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{y} \quad (15)$$

$$\sigma_g^2(\mathbf{x}) = V_g[g(\mathbf{x}) | \mathbf{D}] =$$

$$k(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) - \mathbf{k}^T(\mathbf{x}^*)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{x}^*) \quad (16)$$

式中:  $\mathbf{K} = \mathbf{K}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + \sigma^2\mathbf{I}$ ,  $[k(\mathbf{x}^*)]_i = k(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_i^*)$ ,  $E_g[\cdot]$  和  $V_g[\cdot]$  分别表示以  $g(\cdot)$  为积分变量的求期望和方差运算, 上述计算考虑  $\mathbf{x}^*$  和函数  $g(\mathbf{x}_i)$  的不确定性, 其可获得更加精确的状态预测 PDF。

## 2.2 GPQ 辅助的先验 PDF 逼近

因为系统噪声为系统模型固有属性其不易发生改变<sup>[20]</sup>, 采用 GPQ 对系统函数  $f(\mathbf{x}_k)$  不确定性标定时, 其核函数超参数受噪声影响较小。提高预测协方差估计精度可以改善弱可观测状态量的估计一致性, 同时为降低 GP 模型训练对 GPQ 逼近质量和计算效率的影响, 本文主要利用 GPQ 实现状态先验 PDF 的预测。构造 GP 训练数据集  $\mathbf{D} = (\xi_i, f(\xi_i))$ , 当  $\xi_i$  更新后式(13)中  $i = a$  时预测状态均值为:

$$(\hat{\mathbf{x}}_{klk-1})_a = \mathbf{y}_a^T (\mathbf{K}_{f_a} + \sigma_{w_a}^2)^{-1} \mathbf{q}_a^x \quad (17)$$

$$\mathbf{q}_a^x = \alpha_{f_a}^2 | \mathbf{P}_{k-11k-1} \mathbf{A}_a^{-1} + \mathbf{I} |^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{k-11k-1})^T (\mathbf{P}_{k-11k-1} + \mathbf{A}_a)^{-1} (\mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{k-11k-1})\right) \quad (18)$$

式中:  $\mathbf{y}_a$  为第  $a$  维容积点集对应的函数实例化值;  $\sigma_{w_a}^2$  为含噪声样本点拟合过程产生的方差;  $\alpha_{f_a}^2$ 、 $\mathbf{A}_a$  为第  $a$  维容积点集和第  $a$  个函数实例化值训练对应超参数;  $\mathbf{K}_{f_a}(i, j) = k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 。第  $a$  维和第  $b$  维容积点集对应的预测协方差可表示为:

$$(\mathbf{P}_{klk-1})_{ab} = \underbrace{E_{x_{k-1}}[C_{f_a}[f_a(\mathbf{x}_{k-1}), f_b(\mathbf{x}_{k-1}) | \mathbf{Z}_{k-1}]]}_{V_1} + \underbrace{C_{x_{k-1}}[E_{f_a}[f_a(\mathbf{x}_{k-1}) | x_{k-1}], E_{f_b}[f_b(\mathbf{x}_{k-1}) | x_{k-1}] | \mathbf{Z}_{k-1}]}_{V_2} \quad (19)$$

式中:  $C_{f_a}[\cdot]$  表示以  $f(\cdot)$  为积分变量的求协方差运算; 当  $a \neq b$  时, 有  $V_1 = 0$ ; 当  $a = b$  时, 有  $V_1 = \alpha_{f_a}^2 - \text{tr}[(\mathbf{K}_{f_a} + \sigma_{w_a}^2)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}] + \sigma_{w_a}^2$ ,  $\text{tr}[\cdot]$  表示求矩阵的迹运算。式(19)第 2 项有:

$$V_2 = C_{x_{k-1}}[m_{f_a}(\mathbf{x}_{k-1}), m_{f_b}(\mathbf{x}_{k-1}) | \mathbf{Z}_{k-1}] = \mathbf{y}_a^T (\mathbf{K}_{f_a} + \sigma_{w_a}^2)^{-1} \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{K}_{f_b} + \sigma_{w_b}^2)^{-1} \mathbf{y}_b - (\hat{\mathbf{x}}_{klk-1})_a \times (\hat{\mathbf{x}}_{klk-1})_b \quad (20)$$

定义  $\boldsymbol{\zeta}_i = \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_{k-11k-1}$ ,  $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{A}_a^{-1}\boldsymbol{\zeta}_i + \mathbf{A}_b^{-1}\boldsymbol{\zeta}_j$  以及  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}_{k-11k-1}(\mathbf{A}_a^{-1} + \mathbf{A}_b^{-1}) + \mathbf{I}$ , 则矩阵  $\boldsymbol{\Sigma}$  的元素可表示为:

$$\boldsymbol{\Sigma}_{ij} = \mathbf{k}_{f_a}(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k-11k-1}) \mathbf{k}_{f_b}(\mathbf{x}_i, \hat{\mathbf{x}}_{k-11k-1}) \times \exp\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}_{k-11k-1} \boldsymbol{\delta}_{ij}\right) / \sqrt{|\boldsymbol{\Omega}|} =$$

$$[\log(\alpha_{f_a}^2) + \log(\alpha_{f_b}^2) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\zeta}_i^T \mathbf{A}_a^{-1} \boldsymbol{\zeta}_i + \boldsymbol{\zeta}_j^T \mathbf{A}_b^{-1} \boldsymbol{\zeta}_j - \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}_{ij}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}_{k-11k-1} \boldsymbol{\delta}_{ij})] / \sqrt{|\boldsymbol{\Omega}|} \quad (21)$$

式(17)和(19)即为状态先验 PDF 高斯矩逼近结果。

## 3 高斯过程改进的鲁棒 CKF

为解决高维组合导航滤波中采样点逼近过程的非局部采样问题, 基于模型预测采样点误差阵的线性变换实现容积点更新, 构建免重采样 SUF 提高 CKF 滤波方差估计的一致性<sup>[14]</sup>。定义  $\tilde{\mathbf{X}}_{klk,i}^- = f(\boldsymbol{\xi}_i) - \hat{\mathbf{x}}_{klk-1}$  为  $k$  时刻预测容积点误差,  $\tilde{\mathbf{X}}_{klk,i}^+$  为后验容积点误差, 且存在  $\tilde{\mathbf{X}}_{klk,i}^+ = \gamma_k \tilde{\mathbf{X}}_{klk,i}^-$ , 则  $k+1$  时刻初始容积点  $\mathbf{X}_{klk,i} = \hat{\mathbf{x}}_{klk} + \tilde{\mathbf{X}}_{klk,i}^+$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ 。为保证 CKF 状态更新过程精确匹配状态 PDF 前两阶矩, 设存在如下约束关系:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{klk}^- \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{klk}^- \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{X}}_{klk}^-)^T = \mathbf{P}_{klk-1} - \Delta \mathbf{Q}_{k-1} \quad (23)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{klk}^+ \boldsymbol{\omega} = 0 \quad (24)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{klk}^+ \mathbf{W} (\tilde{\mathbf{X}}_{klk}^+)^T = \mathbf{P}_{klk} - \Delta \mathbf{R}_k \quad (25)$$

式中:  $\mathbf{W} = \text{diag}[\omega_1 \dots \omega_{2n}]^T$ ,  $\text{diag}[\mathbf{a}]$  表示由向量  $\mathbf{a}$  元素构造对角矩阵。式(22)、(23)显然成立, 将  $\tilde{\mathbf{X}}_{klk,i}^+ = \gamma_k \tilde{\mathbf{X}}_{klk,i}^-$  代入(25)可得:

$$\boldsymbol{\gamma}_k = \mathbf{L}_k^+ \boldsymbol{\Xi}^T (\mathbf{L}_k^-)^{-1} \quad (26)$$

式中:  $\mathbf{L}_k^+ = \text{chol}[\mathbf{P}_{klk} - \Delta \mathbf{R}_k]$ ,  $\mathbf{L}_k^- = \text{chol}[\mathbf{P}_{klk-1} - \Delta \mathbf{Q}_{k-1}]$ ,  $\boldsymbol{\Xi}$  为正交矩阵满足  $\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{\Xi}^T = \mathbf{I}$ 。由于  $\mathbf{P}_{klk-1}$  数值变化与导航误差物理意义不一致, 如陆地车辆位置误差不会剧烈变化, 因此  $\Delta \mathbf{R}_k = \mathbf{A}\mathbf{K}_k\mathbf{R}_k(\mathbf{K}_k)^T$  用于控制  $\mathbf{P}_{klk-1}$  引入至  $\mathbf{K}_k$  中的虚假增益系数,  $\Delta \mathbf{Q}_{k-1}$  用于隔离系统加性噪声对采样点误差变换的影响, 一般选择  $\Delta \mathbf{Q}_{k-1} = \mathbf{Q}_{k-1}$ ,  $\mathbf{A}$  是与量测不确定度对应的加权因子, 对 GNSS/INS 组合导航主要针对位置和速度量测不确定性进行补偿。通过配置  $\Delta \mathbf{R}_k$ , 使得滤波收敛时满足  $\mathbf{P}_{klk} \rightarrow \Delta \mathbf{R}_k$ ,  $\mathbf{P}_{k+1k} \rightarrow \Phi_{k+1k} \Delta \mathbf{R}_k (\Phi_{k+1k})^T + \mathbf{Q}_k$ , 防止  $\mathbf{P}_{klk}$ 、 $\mathbf{P}_{k+1k}^{\text{est}}$  奇异导致的滤波发散。

为进一步提高模型预测采样点误差变换矩阵的精度, 将 GPQ 计算的  $\hat{\mathbf{x}}_{klk-1}$ 、 $\mathbf{P}_{klk-1}$  引入到  $\boldsymbol{\gamma}_k$  的计算中, 提高变换矩阵的计算精度。为减少 GPQ 计算量, 利用滤波器  $\mathbf{P}_{klk}$  的动态变化定义导航状态矢量的可观测度  $\sigma_k(j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , 仅当  $\sigma_k(j)$  小于某一阈值  $\sigma_{thr}$  时采用 GPQ 计算先验 PDF, 设状态量  $\mathbf{x}_{klk}(j)$  的可观测度如下<sup>[20]</sup>:

$$\sigma_k(j) = \sqrt{\frac{P_0(j,j)}{P_{klk}(j,j)}} \quad (27)$$

式中:  $P_0(j,j)$  为 CKF 初始状态估计方差阵对应的对角线元素,代表状态量的初始不确定度;  $P_{klk}(j,j)$  为  $k$  时刻状态方差阵对角线元素。

高斯过程辅助的鲁棒 CKF 算法流程如下:

- 1) 设定初始化滤波时长  $t_0$ , 采用 CKF 对  $\hat{x}_{klk-1}$ 、 $P_{klk-1}$ 、 $\hat{x}_{klk}$ 、 $P_{klk}$  进行初始化, 计算得到  $X_{klk,i}, i = 1, \dots, 2n$ ;
- 2) 当滤波时刻  $t > t_0$  时, 采用免重采样 SUF 进行容积点更新, 采用(27)计算航向和姿态的可观测度  $\sigma_k(j)$ ;
- 3) 当  $\sigma_k(j)$  小于某一阈值  $\sigma_{thr}$  时, 采用式(17)和(19)计算状态先验 PDF 的均值  $\hat{x}_{klk-1}$  和  $P_{klk-1}$ , 当  $\sigma_k(j)$  大于某一阈值时, 采用式(7)及(8)计算先验 PDF 的高斯矩;
- 4) 采用式(5)完成滤波增益  $K_k$  计算, 基于式(3)、(4)完成状态后验值的更新;
- 5) 计算更新  $\tilde{X}_{klk,i}^-$ 、 $\tilde{X}_{klk,i}^+$  和  $X_{klk,i}$ , 返回步骤 2) 继续执行。

### 4 实验分析

基于 GNSS/INS 组合模型对 GP-RCKF 进行验证, 状态量  $x_k = (\delta\psi \ \delta v \ \delta p \ b_a \ b_g)^T$ , 分别为姿态误差、速度误差、位置误差以及 IMU 偏置, 以 GNSS 和 INS 位置、速度差分作为滤波器观测量, 滤波更新模型采用闭环校正结构, 即新滤波周期开始时状态误差已校正清零。基于 NovAtel SPAN 系统开展场地实验验证 GP-RCKF 的性能, 其 IMU 光纤陀螺零偏稳定性小于  $1^\circ/h$ , 角度随机游走为  $0.071^\circ/\sqrt{h}$ , 刻度系数误差为  $100 \times 10^{-6}$ , 加速度计零偏稳定性小于  $0.4 \text{ mg}$ , 刻度系数误差为  $300 \times 10^{-6}$ 。IMU 采样率为  $200 \text{ Hz}$ , GPS 采样率为  $5 \text{ Hz}$ , 实验过程记录 IMU 和 GPS 原始数据用于滤波算法的验证, 并将量测数据输入 Waypoint Inertial Explorer 中后处理作为参考轨迹, 其输出采样率为  $100 \text{ Hz}$ 。跑车轨迹如图 1 所示, 行车过程中的车辆运动特征可从图 2 所示惯性数据得出,  $x$  轴、 $y$  轴加速度计和  $z$  轴陀螺仪存在明显时变特征。车辆存在约  $40 \text{ s}$  的停车状态 (GPS 历元  $375 \ 120.60 \sim 375 \ 161.20 \text{ s}$ ), 随后车辆进行 8 字形运动。由于航向角对陆地车辆的自动驾驶影响较大, 且横滚角和俯仰角误差的可观测度较强, 因此本文重点考察 GP 辅助对车辆航向角估计的改善效果。

陆地车辆天向陀螺偏置的可观测度较低, 导致其滤波估计精度较差, 表现为直线行驶一段时间后航向角误差逐渐增大, 采用 CKF 进行组合导航数据融合其航向与姿态可观测度分析如图 3 所示。由于状态可观测度没有

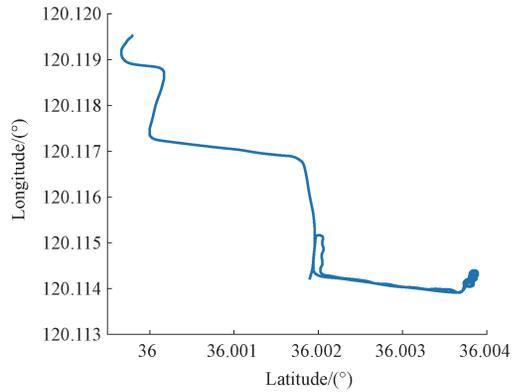


图 1 场地试验轨迹

Fig. 1 Trajectory of field test

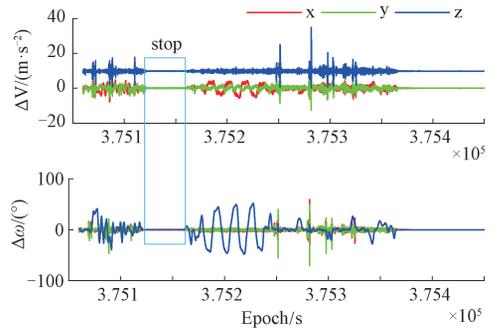


图 2 原始 IMU 数据输出

Fig. 2 Raw IMU data output

统一量纲, 不同状态量之间无法直接进行比较, 由图 3 可以得到单个状态量可观测度随时间变化情况。初始时滤波器各状态量的可观测度逐渐变大, 滤波器估计误差收敛速度较快, 当车辆停止时, 横滚、俯仰以及航向对应的可观测度明显下降, 且航向角可观测度下降更明显, 当车辆进入角运动阶段时各状态量可观测度明显提升, 轨迹后半程的直线运动和停车期间, 各状态量的可观测度再次逐渐下降。

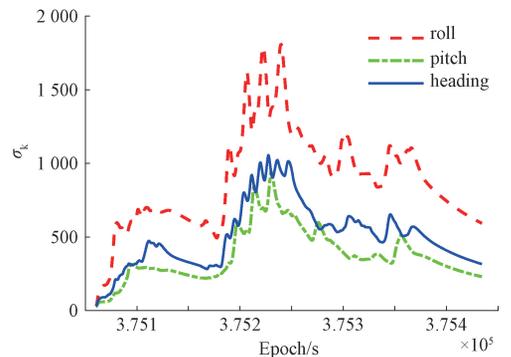


图 3 基于 CKF 方差的状态可观测度分析

Fig. 3 State observability analysis based on CKF covariance

为对比分析各滤波算法性能,采用相同的配置参数进行组合导航数据融合,如  $P_0$ 、 $Q_{k-1}$ 、 $R_k$  及  $\Lambda$  等。分别选择停车和角运动时段进行先验 PDF 逼近, GPQ 计算轨迹时长均为 40 s,对应算法分别记为 GP-RCKF-Stop、GP-RCKF-Angular。航向角和俯仰角估计结果如图 4、5 所示,初始阶段 RCKF 收敛速度较快,其航向和俯仰角较 CKF 有明显改善,但仍存在较大航向稳态误差。在车辆停止(发动机不熄火)时,GP-RCKF-Stop 通过对停车期间先验 PDF 积分运算不确定度进行标定,提高  $\sigma_k$  对应的数值改善了俯仰角估计精度,但其增大了 RCKF 迭代运算的初始不确定度,使得车辆重新运动瞬间航向和俯仰角误差较 RCKF 稍大。车辆角运动剧烈时,式(27)定义的航向和姿态可观测度都较强,GP-RCKF-Angular 采用 GPQ 进行不确定度标定没有改善航向和俯仰角,但当车辆由角运动变成直线运动,GP-RCKF-Angular 明显改善了航向角估计效果。由于姿态误差和 IMU 偏置误差校正信息来源于  $P_{k+11k}$  非对角线元素,采用 GPQ 增大  $P_{k+11k}$  不一定会改善上述状态量的精度,天向陀螺偏置可观测性较弱,因此增大其对应的  $\sigma_k$  可以显著改善航向角估计精度。

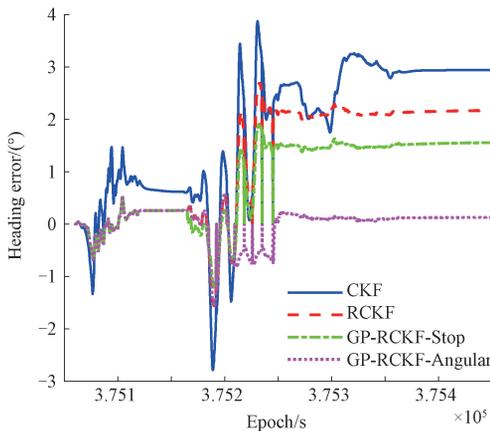


图 4 GPQ 辅助 RCKF 航向角误差

Fig. 4 Heading error of GPQ enhanced RCKF

以均方根误差 (root mean square error, RMSE) 作为评价指标对滤波算法定位性能进行分析,定义轨迹平均位置误差为:

$$AvePos = \sqrt{\frac{1}{2}(E_{RMSE}^2 + N_{RMSE}^2)} \quad (28)$$

式中:  $E_{RMSE}$ 、 $N_{RMSE}$  分别代表车辆东向和北向位置 RMSE。由表 1 可知,当状态可观测性较强时采用 GPQ 会降低位置、横滚角和俯仰角等导航参数的精度,停车时段采用 GPQ 进行先验 PDF 逼近,在不明显降低横滚、俯仰和位置精度的前提下减少航向误差 28.9%,显著改善了直线行驶路段车辆航向角估计精度。基于 MATLAB

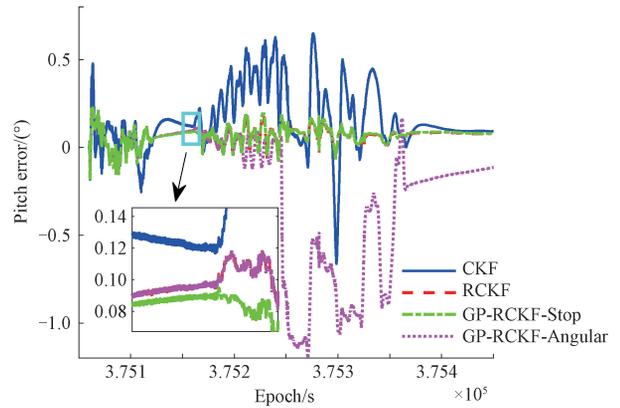


图 5 GPQ 辅助 RCKF 俯仰角误差

Fig. 5 Pitch error of GPQ enhanced RCKF

计时函数测得 CKF 和 RCKF 对试验轨迹的后处理时间分别为 3.01 和 2.87 s。由于 GP-RCKF 的训练输入变量维度为  $30 \times 15$  的矩阵,其运算量较 RCKF 显著增大,后期可采用离线训练减少核函数超参数拟合时间,或者采用稀疏 GP 方法进一步降低 GPQ 的计算复杂度。

表 1 不同滤波算法的导航参数均方根误差

Table 1 RMSE of navigation state for different filters

算法	Heading/(°)	Roll/(°)	Pitch/(°)	AvePos/m
CKF	2.22	0.16	0.24	7.45
RCKF	1.66	0.05	0.08	6.42
GP-RCKF-Stop	<b>1.18</b>	<b>0.05</b>	<b>0.08</b>	<b>6.42</b>
GP-RCKF-Angular	0.33	0.48	0.45	6.55

## 5 结论

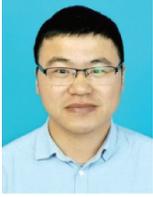
针对陆地车辆行驶时组合导航参数时变的状态可观测度,提出一种 GPQ 增强的 RCKF 算法。场地实验数据分析表明,RCKF 能显著改善车辆位置精度,停车时段进行 GPQ 计算可以在不降低位置精度的条件下改善航向角估计精度;当航向和姿态角可观测度较强时,GPQ 可显著提高直线行驶时航向的估计精度,航向误差较 RCKF 改善约 80.1%,但其降低了位置、横滚角和俯仰角估计精度。本文可为陆地车辆组合导航的数据融合提供参考,后续将围绕不同可观测度状态量的解耦设计组合导航滤波方法。

## 参考文献

[ 1 ] JULIER S J, UHLMANN J K. Unscented filtering and nonlinear estimation [ J ]. Proceedings of The IEEE, 2004, 92(3):401-422.  
 [ 2 ] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman

- filters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(6): 1254-1269.
- [3] JIA B, XIN M, CHENG Y. High-degree cubature Kalman filter [J]. *Automatica*, 2013, 49(2): 510-518.
- [4] 杨菊花, 李文元, 陈光武, 等. 引入滑模观测器的 GPS/INS 组合导航滤波方法 [J]. *仪器仪表学报*, 2019, 40(9): 78-86.
- YANG J H, LI W Y, CHEN G W, et al. GPS/INS integrated navigation filtering method based on sliding mode observer [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2019, 40(9): 78-86.
- [5] 郭士萃, 王春雨, 常丽敏, 等. 鲁棒渐消 CKF 及其在 SINS 初始对准中的应用 [J]. *仪器仪表学报*, 2020, 41(4): 95-101.
- GUO S L, WANG C Y, CHANG L M, et al. Robust fading cubature Kalman filter and its application in initial alignment of SINS [J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2020, 41(4): 95-101.
- [6] 刘春, 卫吉祥, 李维华, 等. 改进的自适应卡尔曼滤波在北斗伪距单点定位中的研究 [J]. *电子测量与仪器学报*, 2020, 34(10): 142-148.
- LIU CH, WEI J X, LI W H, et al. Research on improved adaptive Kalman filter in Beidou pseudorange single point positioning [J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrumentation*, 2020, 34(10): 142-148.
- [7] SARKKA S, NUMMENMAA A. Recursive adaptive Kalman filtering by variational Bayesian approximations [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(3): 596-600.
- [8] CHANGE L B, LI K L, HU B Q. Huber's M-estimation-based process uncertainty robust filter for integrated INS/GPS [J]. *IEEE Sensors Journal*, 2015, 15(6): 3367-3374.
- [9] 李伟, 郝顺义, 黄国荣, 等. 改进自适应 ADMCC-HCKF 算法及在 SINS/CNS/GNSS 中的应用 [J]. *电子测量与仪器学报*, 2021, <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2488.tn.20210629.1550.004.html>.
- LI W, HAO S Y, HUANG G R, et al. Improved adaptive ADMCC-HCKF algorithm and application in SINS/CNS/GNSS integrated navigation [J]. *Journal of Electronic Measurement and Instrumentation*, 2021, <https://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2488.tn.20210629.1550.004.html>.
- [10] WU Y X, HU D W, WU M P, et al. Unscented Kalman filtering for additive noise case: Augmented versus nonaugmented [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(5): 357-360.
- [11] TIAN Y, CHENG Y. Novel measurement update method for quadrature-based Gaussian filters [C]. *Proceedings of 2013 AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, 2013.
- [12] 黄玉龙, 张勇刚, 李宁, 等. 一种改进的高斯近似滤波方法 [J]. *自动化学报*, 2016, 42(3): 385-401.
- HUANG Y L, ZHANG Y G, LI N, et al. An improved Gaussian approximate filtering method [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2016, 42(3): 385-401.
- [13] STRAKA O, DUNIK J. Resampling-free stochastic integration filter [C]. *IEEE 23rd International Conference on Information Fusion*, 2020.
- [14] CUI B B, CHEN X Y, TANG X H. Improved cubature Kalman filter for GNSS/INS based on transformation of posterior sigma-points error [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(11): 2975-2987.
- [15] CUI B B, WEI X H, CHEN X Y, et al. Robust cubature Kalman filter based on variational Bayesian and transformed posterior sigma points error [J]. *ISA Transactions*, 2019, 86: 18-28.
- [16] DEISENROTH M P, TURNER R D, HUBER M F, et al. Robust filtering and smoothing with Gaussian processes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, 57(7): 1865-1871.
- [17] YE W, LI J L, FANG J C, et al. EGP-CDKF for performance improvement of the SINS/GNSS integrated system [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 65(4): 3601-3609.
- [18] 左朝阳, 王跃钢, 陈坡, 等. 基于高斯过程的中心差分卡尔曼滤波在 BDS/INS 组合导航中的应用 [J]. *中国惯性技术学报*, 2020, 28(2): 193-198.
- ZUO ZH Y, WANG Y G, CHEN P, et al. Application of a Gaussian processes based central difference Kalman filter in the BDS/INS integrated system [J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2020, 28(2): 193-198.
- [19] PRUHER J, STRAKA O. Gaussian process quadrature moment transform [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(9): 2844-2854.
- [20] 严龚敏, 邓瑀. 传统组合导航中的实用 Kalman 滤波技术评述 [J]. *导航定位与授时*, 2020, 7(2): 50-64.
- YAN G M, DENG Y. Review on practical Kalman filtering techniques in traditional integrated navigation system [J]. *Navigation Positioning & Timing*, 2020, 7(2): 50-64.

### 作者简介



**崔冰波** (通信作者), 2017 年于东南大学获得博士学位, 现为江苏大学副研究员, 主要研究方向为组合导航及农机无人化技术。

E-mail: cuibingbo@ujs.edu.cn

**Cui Bingbo** (Corresponding author)

received his Ph. D. degree from Southeast University in 2017. He is currently an associate research fellow at Jiangsu University. His main research interests include integrated navigation and

technology on unmanned agricultural machinery.



**吉峰**, 2017 年于中原工学院获得学士学位, 现为江苏大学硕士研究生, 主要研究方向为无人农机多机协同作业。

E-mail: peak.f.ji@foxmail.com

**Ji Feng** received his B. Sc. Degree from Zhongyuan University of Technology in 2017.

He is currently a M. Sc. candidate at Jiangsu University. His main research interest includes multi-machine cooperative operation of unmanned agricultural machinery