DOI: 10.13382/j.jemi.B2002966

大型火箭橇位置参数测量方法*

李　洋　瞿剑苏　李鸿儒

（航空工业北京长城计量测试技术研究所　北京　100095）

摘　要: 针对火箭橇超长尺寸位置参数的高精度测量需求,设计了一种采用激光跟踪仪与全站仪的协同组网测量方法。该方法集成两种仪器各自优势满足测量需求。同时引入坐标控制场用来构建约束场,建立约束方程。采用加权融合的方法优化权值,采用 Levenberg-Marquard 寻优算法求解方程组的最优解。做了现场条件下的试验并采用与基准尺标准长度比对的方法对精度进行了分析验证。结果表明,在 3 km 范围内测量误差保持在 3 mm,实现了高精度、高效率的对超长距离位置信息进行测量。

关键词: 超长尺寸测量;组网;权值分配;Levenberg-Marquard 算法

中图分类号: TH711;TN206　　**文献标识码:** A　　**国家标准学科分类代码:** 410.55

Method for measuring position parameter of large rocket sled

Li Yang　Qu Jiansu　Li Hongru

(AVIC Beijing Changcheng Institute of Metrology & Measurement, Beijing 100095, China)

Abstract: In order to meet the high-precision measurement requirements of the ultra-long position parameters of rocket skids, a collaborative network measurement method using a laser tracker and a total station was designed, which can integrate the advantages of the both systems. The coordinate control field is introduced to construct the constraint field and the constraint equation. The weights are used to optimize the weights, and the Levenberg-Marquard optimization algorithm is used to solve the optimal solution of the equations. Tests were performed under field conditions and the accuracy was analyzed and compared with the standard length of the reference ruler. The results show that the measurement error is kept at 3 mm within the range of 3 km, which realizes high-precision and high-efficiency measurement of ultra long distance position information.

Keywords: ultra-long size measurement; networking; weight allocation; Levenberg-Marquard algorithm

0　引　言

火箭橇是一种大型,高精度地面动态模拟试验设备,利用推力强大的火箭助推器推动测试物体在类似铁轨的专用滑轨上高速前进。主要用于航空航天及高新技术产品在高速下的动态性能分析,如速度与加速度等[1-2]。目前获取动态参数的方法主要有高速摄影法和光电探测位置标法。

高速摄影法[3-5]是利用高速摄像机在短时间内拍摄大量照片,得到橇体在通过相机前后的动态参数。高速摄影法优点是效率高,无需其他辅助设备,缺点是单台相机只能探测一定距离范围内的动态参数,如果想要得到全程的动态参数,则需要多台相机协作,成本高昂。

光电探测位置标法[6-7]是通过建立位置标,当橇体运行通过轨道上建立的每一个位置标时,光电探测组件产生脉冲信号,存储单元将这个脉冲信号到来的时刻值锁存并存储,得到橇体经过该位置标的时间信息。将时间序列和每个位置标的空间位置信息对应起来,数据处理后,可得到火箭橇在全程运行过程中的时空位置关系。该方法优点在于位置参数一次标定后可长期使用,成本低,更适合于火箭橇室外,超长距离的特点。

其中,地面位置标距离参数标定的准确性是影响整个动态性能的一个关键因素。火箭橇长度通常在公里

收稿日期:2020-02-20　　Received Date: 2020-02-20

*基金项目:国家重大科学仪器设备开发专项(2017YFF0106408)资助

级,一般每隔 1~3 m 设置一个位置标,即全程有近千个位置标。位置标分布距离跨度大、数量多,目前常见的测量设备因量程与测量精度,无法单独实现公里级的高精度测量要求[8-9]。

本文在研究全站仪和激光跟踪仪测量方法的基础上提出一种基于两种仪器组网协同测量的方法,通过引入的坐标控制场建立足够的约束方程,利用 Levenberg-Marquard 寻优算法求解得到位置标的最优参数,最终通过现场试验验证了组网方法的精度。

1　测量原理

1.1　激光跟踪仪测量原理

激光跟踪仪是目前常用的大尺寸类测量仪器,具有操作简便,稳定性好,测量精度高的特点[10]。它集激光干涉测距技术,光电检测技术,精密机械技术,计算机及控制技术于一体,可对空间目标进行跟踪并测量三维坐标。

激光跟踪仪主要由跟踪头、目标反射镜、控制器和测量软件组成。其测量原理如图 1 所示。跟踪仪为一个球坐标测量系统,通过两个高精度码盘和干涉测距模块分别获取测量目标的水平角,俯仰角和距离信息。

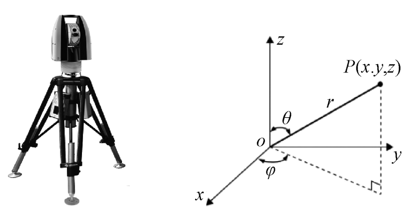

图 1　激光跟踪仪测量示意图

Fig. 1　Diagram of laser tracker measurement

水平角 φ,俯仰角 θ,距离 γ,可以唯一的确定位置点。其数学公式为:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \tag{1}$$

激光跟踪仪测量不确定度可以达到 $U=(0.015+0.006\ L)$ mm,($k=2$),量程可达 80 m。

1.2　全站仪测量原理

全站仪是全站性电子测速仪的简称,又被叫做“电子全站仪”,是指由电子经纬仪,光电测距仪,电子记录器组成的一种多功能高效率的地面测量仪器[11]。

全站仪也是球坐标测量系统,不同的是其测距是基于电磁波测距,是以电磁波作为载波,传输光信号来测量距离的一种方法。它的基本原理是利用仪器发出的光波(光速已知),通过测定出光波在测线两端点间往返传播的时间 t 来测量距离 S。

图 2　全站仪示意图

Fig. 2　Diagram of total station

$$r = \frac{C \times t}{2} \tag{2}$$

根据测距原理可知,全站仪测量距离远,量程最大可达 3 km。但测量精度较低,为 $U=(1.2+2.0\times10^{-3}L)$ mm,($k=2$)。

通过对以上两种设备测量方法的分析可以看到,全站仪测量距离远,在单独测量火箭橇位置标时,转站次数少,但同一站位测量近距离目标和远距离目标时,测量误差最大可相差 6~7 mm,不能满足高精度测量的要求。

激光跟踪仪测量精度高,但其最远测量范围只能达到 80 m,在单独测量火箭橇位置标时,需要进行大量的转站,转站误差累积很大,同样无法满足高精度测量的要求[12-13],如图 3 所示。

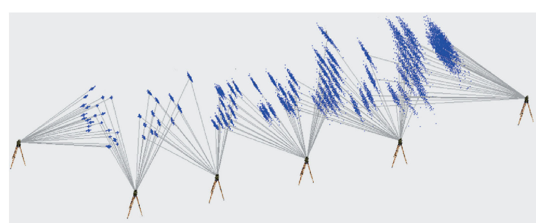

图 3　转站误差积累示意图

Fig. 3　Diagram of error accumulation in transfer stations

2　组网方法

针对两种仪器各自的优势和不足,组建全站仪和激光跟踪仪联合测量网,解决全程范围内位置标的高精度测量。

测量网内具有多站位激光跟踪仪、多站位全站仪、位置标、临时位置标(由于火箭橇位置标全部位于一条直线方向上,根据坐标系转换原则,需在位置标周围布一定数

量的临时位置标，加强三维方向上的空间约束。为后面叙述方便，位置标和临时位置标统称位置标），通过优化算法获取网内所有站位的位姿参数和位置标坐标值。全站仪和激光跟踪仪分别通过多个站位完成对全部位置标的测量，基于仪器的数学模型构建约束方程。通过优化算法获取相应参数的最优值。

2.1 测量网数学模型建立

假设测量网共包含 I 个站位的激光跟踪仪，J 个站位全站仪，M 个位置标，如图 4 所示。每个站位的设备对所有测量范围内的位置标均进行测量。

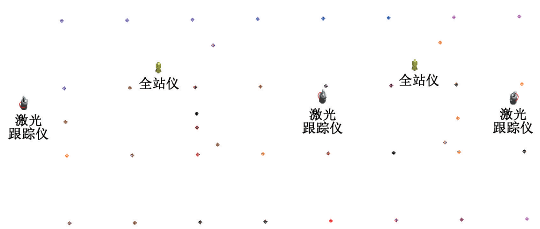

图 4 组网示意图

Fig. 4 Networking diagram

以大地水平的法矢量法向为+Z 轴，以第一个位置标指向最后一个位置标的方向为+X 轴，以第一个位置标为原点，根据右手定则建立坐标系，作为全局坐标系。

对于某个位置标，通过求解每个站位的仪器坐标系到整体坐标系的旋转参数、平移参数以及比例因子[R, T, λ]建立约束方程。

当某位置标被激光跟踪仪观测到时，约束方程可先将位置标转换到跟踪仪坐标系下：

$$\begin{bmatrix} x_{LTi} \\ y_{LTi} \\ z_{LTi} \end{bmatrix} = (1+\lambda) \times R_{LT} \times \begin{bmatrix} x_{LT} \\ y_{LT} \\ z_{LT} \end{bmatrix} + T_{LT} \tag{3}$$

式中：$(x_{LT}, y_{LT}, z_{LT})^{\mathrm{T}}$ 为全局坐标系下位置标坐标值，$(x_{LTi}, y_{LTi}, z_{LTi})^{\mathrm{T}}$ 为在第 i 站跟踪仪仪器坐标系下位置标坐标值。

根据上式，可以建立如下约束方程：

$$f_{LR} = \begin{cases} f_{LRx} = x^* - x \\ f_{LRy} = y^* - y \\ f_{LRz} = z^* - z \end{cases} \tag{4}$$

式中：带 * 的表示最优值通过寻优算法反推回去的得到的测量值；不带 * 的表示仪器测量值。

同样的，当某位置标被全站仪观测到时，参考上述分析可得到约束方程：

$$f_{TS} = \begin{cases} f_{TSx} = x^* - x \\ f_{TSy} = y^* - y \\ f_{TSz} = z^* - z \end{cases} \tag{5}$$

每一个位置标 $P_m (m=1,2,\cdots,M)$ 分别被被 I_i 个站位的跟踪仪和 J_j 个站位的全站仪观测到时，对 f_{LR}, f_{TS} 两组约束方程建立目标函数：

$$F = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{I_i} f_{LRi} + \sum_{j=1}^{J_j} f_{LRj} \right) \tag{6}$$

2.2 测量网权值分配方法

测量网的构建过程是基于所有观测要素具有相同权值的基础上分析的。然而通过第一部分对仪器分析可以看到，激光跟踪仪的测量不确定度明显小于全站仪。同时，同一站位的仪器分别测量近距离位置标和远距离位置标时，测量不确定度也相差很大。如果按照等权值建立目标函数，会导致不确定度大的测量要素所占比重过大，目标函数失真。针对此，采用不确定度加权融合的算法，优化目标函数，构建过程如下。

设某一位置标 P_m 共被 I_m 个站位的跟踪仪和 J_m 个站位的全站仪看到。根据 A 类标准不确定度评价方法[14]，令每个站位仪器在短时间内对点 P_m 重复测量 n 次，得到测量结果：(x_i, y_i, z_i), $(i=1,2,\cdots,n)$，将其算数平均值作为估计值，计算标准偏差为：

$$\begin{cases} u_{xi} = \sigma(\bar{x}_i)/\sqrt{n} \\ u_{yi} = \sigma(\bar{y}_i)/\sqrt{n} \\ u_{zi} = \sigma(\bar{z}_i)/\sqrt{n} \end{cases} \tag{7}$$

位置标 P_m 的合成不确定度 U_m，应满足不确定度合成原则[15]，同时对每个可以观测该点的仪器站位赋予权值 σ_i，则有：

$$U_m = \sqrt{\sum_{i=1}^{I_m+J_m} \sigma_i^2 (u_{xi}^2 + u_{yi}^2 + u_{zi}^2)} \tag{8}$$

同时，权值 σ_i 应满足：

$$\sum_{i=1}^{I_m+J_m} \sigma_i = 1 \tag{9}$$

为使位置标的 U_m 最小，联合式(8)、(9)，引入拉格朗日乘数法[16-17]，建立函数：

$$LL = \sum_{i=1}^{I_m+J_m} \sigma_i^2 (u_{xi}^2 + u_{yi}^2 + u_{zi}^2) - \gamma \left(\sum_{i=1}^{I_m+J_m} \sigma_i - 1 \right) \tag{10}$$

γ 为常数因子。未知量为$(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{Im+Jm})$。对未知量求导，并且令：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial LL}{\partial \alpha_1} & \dfrac{\partial LL}{\partial \alpha_2} & \cdots & \dfrac{\partial LL}{\partial \alpha_{I_m+J_m}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{11}$$

通过求解上述方程组，得到多组未知量的解，但只有一组解满足要求，能使位置标 P_m 的合成不确定度 U_m 最小。

假设满足要求的权值向量为 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{Im+Jm}]$，将该向量引入目标函数，将目标函数优化为：

$$F = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{I_i} f_{LRi} \sigma_i + \sum_{j=1}^{J_j} f_{LRj} \sigma_j \right) \tag{12}$$

每台仪器有 3 个位置参数未知量,每个位置标同样有 3 个坐标参数未知量,故目标函数共有未知量个数为:

$$3 \times (I + J + M) \tag{13}$$

每一个位置标 P_m 分别被被 I_i 个站位的跟踪仪和 J_j 个站位的全站仪观测到,跟踪仪每个站位可建立 3 个方程,全站仪每个站位也可建立 3 个方程,故目标函数的约束方程共有:

$$3 \times \left(\sum_{i=1}^{I} I_i + \sum_{j=1}^{J} J_j \right) \tag{14}$$

当方程的个数大于未知量的个数时,目标函数存在冗余,可使用寻优算法求解最优值。

因目标函数未知量多,约束方程数据量很大,需使用一种收敛性好,梯度下降快的寻优算法。

2.3　Levenberg-Marquardt 寻优算法及初值选择

Levenberg-Marquardt 算法是一种兼具梯度法和牛顿法优点的非线性最小二乘算法,其收敛速度快、稳定性好,能有效地处理冗余参数问题,为大参数化问题提供了快速收敛的正则方法[18-20]。

根据前两节分析,目标函数简化表示为 F,约束方程简化表示为 $f(x)$。J 为雅克比矩阵,表示为:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{15}$$

根据牛顿法,增量 $\boldsymbol{\Delta x}$ 有:

$$\boldsymbol{\Delta x} = -[\nabla^2 \boldsymbol{F}]^{-1} \nabla \boldsymbol{F} \tag{16}$$

其中:

$$\nabla \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(x) \tag{17}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} + \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{f}(x) \nabla^2 \boldsymbol{f}(x)) \tag{18}$$

将式(16)和(17)代入式(18),增量 $\boldsymbol{\Delta x}$ 可表示:

$$\boldsymbol{\Delta x} = -[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J}]^{-1} \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(x) \tag{19}$$

Levenberg—Marquardt 算法是在此基础上进行了改进,表示为:

$$\boldsymbol{\Delta x} = -[\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{J} + \mu \boldsymbol{I}]^{-1} \boldsymbol{J}^{T} \boldsymbol{f}(x) \tag{20}$$

式中:μ 为大于 0 的常数;$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。迭代过程中如果 μ 如果很大,则接近梯度下降法,当 μ 很小,则接近牛顿法。因此,Levenberg—Marquardt 算法精度高,计算速度更快,较原来的梯度下降法速度提高几十倍以上。

但是采用 Levenberg—Marquardt 算法必须采用合适的迭代初值,否则易造成迭代不收敛而影响算法精度和速率。算法中的迭代初值主要包括激光跟踪仪和全站仪每个站位初始的位置参数,以及位置标的初始坐标值。

其中,全站仪和激光跟踪仪可直接进行点位测量,可通过式(3)的多点坐标系转换方法完成迭代初值获取。位置标的坐标初始值可以利用全站仪的单独转站测量获取。

3　现场试验

试验中全站仪采用 LEICA 的 TM50,激光跟踪仪采用 LEICA 的 AT402。

由于火箭橇所有位置标均设置在一条直线方向上,仅仅依靠位置标无法有效的约束 6 个自由度方向上的变换参数,因此,在位置标两侧约 60 m 处,增加一定数量的临时位置标,增加坐标约束。火箭橇现场示意图如图 5 所示。

图 5　火箭橇现场示意图

Fig. 5　Diagram of rocket sled

根据全站仪的量程,将全站仪分别放置在距离火箭橇初始位置标 0、1、2、3 km 处,测量量程内的所有位置标和临时位置标。通过测量软件设置每个位置标测量 10 次,每次采样时长为 2 s,取平均值。同样,根据激光跟踪仪的量程,第一站位放置在距离火箭橇初始位置标 60 m 处,后面每隔 120 m 设置一个站位,测量量程内的所有位置标和临时位置标。通过测量软件设置每个位置标测量 10 次,每次采样时长为 2 s,取平均值。

为了验证激光跟踪仪和全站仪组网测量的精度,在整条火箭橇上每隔约 300 m,放置一组距离基准尺。基准尺长度为 3 m,通过配套三脚架可以实现水平、竖直、纵深等多个方向的摆放。基准尺是两端各有测量点且两点距离已知的标准器,将基准尺的距离参量作为标准值,激光跟踪仪和全站仪分别测量基准尺两端

点位的坐标值(距离基准尺两端点位可看做 2 个临时位置标共同参与解算),算出距离值。由于两种设备的测量不确定度均与测量距离有关,距离越远测量不确定度越大;同时转站次数越多,转站误差积累越大。而单点不确定度与距离不确定度之间满足不确定度合成原则:

$$U_L = \sqrt{(U_{p1}^2 + U_{p2}^2)} \tag{21}$$

根据式(21)可知,单点的不确定度越大,距离值的不确定度就会越大,因此可以将该距离值与标准值进行比较,以误差的大小作为评价组网精度的标准。

试验时,每个位置的距离基准尺均测量 10 遍,取平均值作为测量结果。

测量完成后,建立目标函数。全程共有 4 个全站仪站位;25 个跟踪仪站位;位置标 1 000 个;临时位置标 96 个;基准尺 11 组。

依据 2.1 节建立目标函数。根据式(13)得到,共有 $3 \times (4 + 25 + 1000 + 96 + 11 \times 2) = 3\ 441$ 个未知参数。所有站位的全站仪和激光跟踪仪对量程内所有可观测的位置标和临时位置标进行测量。根据式(14)可知,共可建立约束方程 7 345 个。约束方程个数远大于未知数个数,存在数据冗余,可求解最优解。未知数与约束方程数据量庞大,采用 2.3 节算法求解最优值。解算共迭代 13 次使得残余误差最小,得到最优解。试验流程如图 6 所示,试验结果分析如图 7 所示。

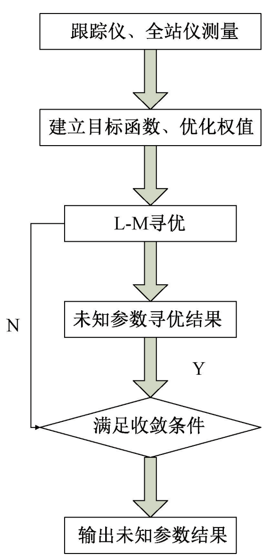

图 6　试验流程

Fig. 6　Test flow chart

通过图 7 试验数据可以看到,采用激光跟踪仪和全站仪单独测量时,测量误差都会随着距离的增加而快递增大;而采用 2 种仪器组网测量时,全程测量误差比较稳定,同时整体误差要好于单独测量。数据证明了

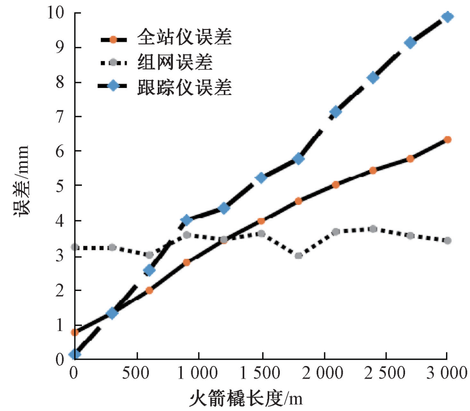

图 7　精度对比结果

Fig. 7　Results of accuracy comparison

组网测量可以提高测量精度,具有高精度、高效率的优点。

4　结　论

针对火箭橇的超长距离的特点,目前单一测量系统无法满足现场高精度测量的需求。提出结合激光跟踪仪和全站仪协同组网测量的方法。在研究两种设备测量原理及测量不确定度的基础上,建立测量网的数学模型,通过基于不确定度加权融合算法,优化目标函数,再通过 Levenberg—Marquardt 寻优算法得到最优值。进行了现场试验,试验数据表明该方法高精度和可行性,具有较大的推广价值。后续可将该方法推广到其他需要进行超长距离标定的领域,例如高铁铁轨,基线场等。

参考文献

[1]　郑善魁,胡杰,孙颖,等. 基于火箭橇的北斗动态定位精度鉴定方法[J]. 导航与控制,2015,14(6):9-13,8.
ZHENG SH K, HU J, SUN Y, et al. A Method of Dynamic Position Accuracy Evaluation for BeiDou Based on Rocket Sled Test[J]. Navigation and Control, 2015, 14(6):9-13,8.

[2]　高娜,晁芳群,齐永涛,等. 超声速火箭橇全程速度雷达测试方法[J]. 导航与制,2015,14(6):61-64,55.
GAO N, ZHAO F Q, QI Y T, et al. The Radar Test Method for Velocity of Supersonic Rocket Sled[J]. Navigation and Control,2015,14(6):61-64,55.

[3]　徐锐,杨国来,陈强,等. 高速摄影技术在火炮运动学分析中的测试误差研究[J]. 南京理工大学学报(自然科学版),2015,39(5):523-530.
XU R, YANG G L, CHEN Q, et al. Error analysis of high speed photography in measuring kinematic parameter of artillery[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology,2015,39(5):523-530.

[4]　刘泽庆,张玉荣,赵建新,等. 基于数字摄影测量的靶

场高速摄影测速方法[J]. 弹道学报,2015,27(4):47-51.
LIU Z Q, ZHANG Y R, ZHAO J X, et al. High-speed photography velocity measurement in range based on digital photogrammetry[J]. Journal of Ballistics,2015,27(4):47-51.
[5] 杨一帆,张鹏军,牛俊财. 基于亚像素边缘检测的高速摄影下枪机运动分析[J]. 电子测量与仪器学报,2018,32(11):43-49.
YANG Y F, ZHANG P J, NIU J C. Bolt Motion Analysis in High-Speed Photography based on Sub-pixel Edge Detection[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation,2018,32(11):43-49.
[6] 穆高超,姜东阳,范秋亚,等. 火箭橇试验橇体时空位置全程测试-单台光电经纬仪法[J]. 测试技术学报,2013,27(6):543-546.
MU G CH, JIANG D Y, FAN Q Y, et al. The rocket seld space-time process test by a single photoelectric theodolite[J]. Journal of Test and Measurement Technology,2013,27(6):543-546.
[7] 孙浩,王艳艳,穆高超,等. 火箭橇遮光板法时空位置测试技术[J]. 弹箭与制导学报,2016,36(2):164-166.
SUN H, WANG Y Y, MU G CH, et al. Research on position and time testing technology for rocket sled shading plate method[J]. Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance,2016,36(2):164-166.
[8] 李广云,范百兴. 精密工程测量技术及其发展[J]. 测绘学报,2017,46(10):1742-1751.
LI G Y, FAN B X. The development of precise engineering surveying technology[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2017,46(10):1742-1751.
[9] 刘芳芳,傅云霞,余培英,等. 大尺寸空间计量仪器的应用与校准[J]. 计量技术,2012,(6):50-53.
LIU F F, FU Y X, YU P Y, et al. Application and calibration of large-scale space measuring instruments[J]. Measurement Technique,2012,(6):50-53.
[10] 林嘉睿,郏继贵,张皓琳等. 激光跟踪仪测角误差的现场评价[J]. 仪器仪表学报,2012,33(2):463-468.
LIN J R,ZHU J G,ZHANG H L, et al. Field Evaluation of Laser Tracker Angle Measurement Error[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument,2012,33(2):463-468.
[11] 喻彩丽. 基于全站仪三坐标测量系统的测量方法[J]. 光学仪器,2010,32(2):1-4.
YU C L. Measurement method based on total station in 3D measurement system[J]. Optical Instruments,2010,32(2):1-4.
[12] 金涨军,李江雄,俞慈君,等. 大尺寸空间测量中转站误差分析与估计[J]. 浙江大学学报(工学版),2015,49(4):655-661.
JIN Z J,LI J X,YU C J, et al. Registration error analysis and evaluation in large-volume metrology system[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science),2015,49(4):655-661.
[13] 范春艳,刘尚国,张金榜,等. 全站仪构建全局测量空间的转站精度仿真分析[J]. 测绘科学,2016,41(12):248-253.
FAN CH Y, LIU SH G, ZHANG J B, et al. Simulation analysis on the coordinate transformation accuracy of the total station constructing global measurement space[J]. Science of Surveying and Mapping, 2016, 41 (12): 248-253.
[14] 樊娟娟,潘振东. 大学物理试验中 A 类不确定度的五种处理方法[J]. 大学物理试验,2016,29(2):100-105.
FAN J J, PAN ZH D. Five processing methods of type an uncertainty in university physics experiment[J]. Physical Experiment of College,2016,29(2):100-105.
[15] 方兴华,宋明顺,顾龙芳,等. 基于自适应蒙特卡罗方法的测量不确定度评定[J]. 计量学报,2016,37(4):452-456.
FANG X H, SONG M SH, GU L F et al. Application of adaptive Monte Carlo method on measurement uncertainty evaluation[J]. Acta Metrologica Sinica,2016,37(4):452-456.
[16] 甘大旺. 拉格朗日乘数法的初等应用[J]. 宁波教育学院学报,2017,19(1):134-137.
GAN D W. The primary application of lagrange multiplier method[J]. Journal of Ningbo Institute of Education,2017,19(1):134-137.
[17] 李润鑫,黄辉,尚振宏,等. 多目标约束向量优化问题的类拉格朗日乘数法[J]. 数学物理学报,2018,38(6):1076-1094.
LI R X, HUANG H, SHANG ZH H. Lagrange-like multiplier rules for weak approximate pareto solutions of multi-objective constrained vector optimization problems[J]. Acta Mathematica Scientia,2018,38(6):1076-1094.
[18] 熊春宝,白洪志,李郎,等. 局域定位系统拟应用于工程测量系统自定位法[J]. 同济大学学报(自然科学版),2017,45(12):1879-1886.
XIONG CH B, BAI ZH H, LI L et al. Self-location method of regional positioning system in engineering survey application[J]. Journal of Tongji University (Natural Science),2017,45(12):1879-1886.

[19] 俞慈君,宋凯,李江雄,等. 基于 Levenberg-Marquardt 算法的线性热变形补偿系数矩阵优化[J]. 浙江大学学报(工学版),2016,50(6):1056-1064.

YU C J, SONG K, LI J X, et al. Optimization of linear thermal deformation compensation coefficient matrix based on Levenberg-Marquardt algorithm [J]. Journal of Zhejiang University(Engineering Science),2016,50(6):1056-1064.

[20] 郭金运,徐晓飞,沈毅,等. 整体最小二乘算法及测量应用研究综述[J]. 山东科技大学学报(自然科学版),2016,35(4):1-12.

GUO J Y, XU X F, SHEN Y, et al. Review on total least squares methods and applications in surveying[J]. Journal of Shandong University of Science and Technology (Natural Science),2016,35(4):1-12.

作者简介

李洋,2013 年于航空工业计量所获得硕士学位,现为航空工业计量所工程师,主要研究方向为几何量大尺寸测量校准。

E-mail:ly_ten@163.com

Li Yang received M. Sc. degree from Changcheng Institute of Metrology & Measurement in 2013. He is currently an engineer of Changcheng Institute of Metrology & Measurement. His main research interests include calibration of large-scale geometric measurements.