DOI: 10. 13382/j. jemi. B2002930

基于欠采样的载频与二维到达角联合估计方法*

张　钧[1]　姜思仪[2]　彭喜元[2]

（1. 北京遥感设备研究所　北京　100854; 2. 哈尔滨工业大学　电子与信息工程学院　哈尔滨　150001）

摘　要:针对阵列参数估计中传统奈奎斯特采样定理给采样和存储设备带来的巨大压力,提出了一种基于随机解调(RD)阵列结构的信号载频与二维到达角(2D-DOA)联合估计方法。利用不同天线阵列之间的互相关矩阵构造协方差矩阵,基于旋转不变子空间(ESPRIT)方法求解载频和 2D-DOA 参数,同时克服了载频和 2D-DOA 之间的配对问题。仿真实验结果证明了该方法能较好地从较少的欠奈奎斯特样本中估计目标信号的载波频率和 2D-DOA,并恢复原信号的时域波形。

关键词: 2D-DOA;联合估计;双 L 型阵列;随机解调;压缩感知

中图分类号: TN820. 5　　**文献标识码**: A　　**国家标准学科分类代码**: 510. 4020

Joint carrier and 2D-DOA estimation based on sub-nyquist sampling

Zhang Jun[1]　Jiang Siyi[2]　Peng Xiyuan[2]

(1. Beijing Institute of Remote Sensing Equipment, Beijing 100854, China;
2. School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The traditional Nyquist sampling theorem brings a pressure in the sampling and storage devices for array parameter estimation in radar signal. A joint carrier frequency and two-dimensional direction of arrival (2D-DOA) estimation method are proposed based on double L shaped array random demodulation (RD) structure. This method based on the estimating signal parameter via rotational invariance technique (ESPRIT) decomposition method. The algorithm constructs a cross-correlation matrix between different antennas. The corresponding pairing method is also provided. Simulation results show that this method can estimate the carrier frequency and 2D-DOA of the target signal from the sub-Nyquist samples, and reconstruct the time domain waveform of the original signal.

Keywords: 2D-DOA; joint estimation; two L-shaped arrays; random demodulation; compressed sensing

0　引　言

目前,多频点信号广泛应用于各个领域中,如雷达[1]、信号处理[2-3]和生物医学工程[4]等。因此,对多频点信号的参数进行估计是目前信号处理与通信等领域当中存在的一个重要的问题。在实际应用中,往往需要对信号进行联合多参数估计。其中,二维到达方向(two-dimensional direction of arrival,2D-DOA)和载波频率联合估计备受关注。然而,随着信息技术的发展,传统的基于奈奎斯特定理的信号采集方式给前端 ADC 及后端数据存储和处理带来了很大的压力。

最近,新兴的压缩感知(compressed sensing, CS)理论[5-10]能够在少量样本的情况下准确地恢复稀疏信号,该理论大大降低了采样率和存储传输压力,具有很高的应用价值。美国国防部高级研究计划局提出了模拟信息转换[11]。关于模拟信息转换技术的研究目前已取得了许多成果,如随机滤波[12]、针对多频点信号的随机解调(random demodulation, RD)系统[13]、针对多频带信号的多陪集采样系统[14]及调制宽带转换器[15-16]系统等。其中随机解调系统针对多频点信号模型,结构简单,易于实现,能以较低的采样率重构多频点信号。

为了降低阵列信号处理理论中,多个通道同时采样产生的大量数据对后续数据处理和数据存储造成的巨大

收稿日期:2020-01-16　　Received Date: 2020-01-16

*基金项目:国家自然科学基金面上项目(61671177)资助

压力,有必要将压缩感知理论甚至模拟信息转换技术与阵列信号处理理论相融合,开展基于压缩感知的阵列多参数联合估计方法的研究。目前,许多学者研究了压缩感知与联合多参数估计的结合。文献[17]将到达角度离散化,利用稀疏思想建立信号重构模型。文献[18]提出一种 CS 联合奇异值分解(SVD)的 CS-SVD 算法,可以联合估计信号载频和 DOA,但配对步骤需要空域滤波,较为繁琐。文献[19]提出了一种基于 L 型阵列的 2D-DOA 估计的欠采样算法,但估计所需的天线阵元个数较多。文献[20-21]提出了一种基于多陪集采样结构的窄带信号频率和 DOA 估计方法,分别基于子空间分解和 CP 分解方法,但接收阵列结构复杂,需要通道数较多。文献[22-23]将其进行了扩展,利用稀疏阵列减少了所需的阵元个数,但这种结构对前端 ADC 仍有比较高的要求[15]。文献[24-25]将调制宽带转换器技术与阵列信号处理相结合,提出了一种基于 L 型阵列的联合载波 DOA 恢复算法。从以上我们可以发现,在大多数工作中没有考虑 2D-DOA 的估计。然而,在实际中,不同的目标并不可能均位于同一个平面上。因此,需要利用俯仰角和方位角来联合描述目标在三维空间中的方向。

同时,由于随机解调结构简单易于实现的优良特性,本文提出了一种基于随机解调结构的欠采样的联合载波频率和 2D-DOA 估计方法。本文方法是基于旋转不变子空间(estimating signal parameter via rotational invariance techniques, ESPRIT)分解方法,它可以从欠奈奎斯特采样中联合恢复载频和 2D-DOA,克服了 3 个参数之间的配对问题。一旦恢复载波频率和 2D-DOA,就可以重建信号本身。最后利用仿真验证了该方法的有效性。

1　信号模型与系统描述

1.1　信号模型

设有 M 个目标发出的连续时间单频点复信号 $s_i(t)=A_i e^{j2\pi f_i t}$,其中 $i\in\{1,2,\cdots,M\}$,调制载频为 $\{f_i\}_{i=1}^{M}$。假定所有的信号均为远场并且互不相关。假设目标信号从互不相同的方位角 $\{\theta_i\}_{i=1}^{M}$ 和俯仰角 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{M}$ 入射到接收阵元上,满足 $\theta_i\in(-90°,90°)$,$\varphi_i\in(0°,90°)$。为了避免阵列模糊,假设对于 $i\neq j$,有:

$$f_i\cos\theta_i\cos\varphi_i\neq f_j\cos\theta_j\cos\varphi_j$$
$$f_i\sin\theta_i\cos\varphi_i\neq f_j\sin\theta_j\cos\varphi_j$$
$$f_i\sin\varphi_i\neq f_j\sin\varphi_j \tag{1}$$

假设目标信号频率范围为 $\boldsymbol{F}=[-\frac{f_{Nyq}}{2},\frac{f_{Nyq}}{2}]$,其中 f_{Nyq} 为信号的奈奎斯特频率。

1.2　双 L 型 MWC 阵列

双 L 型阵列接收结构如图 1 所示,由 3 个互相垂直得均匀线性天线阵列组成。沿 x 轴、y 轴和 z 轴正方向均有 N 个阵元,3 个轴在原点共用一个阵元。相邻阵元之间的间距满足 $d\leqslant c/f_{Nyq}$,其中 c 为光速。

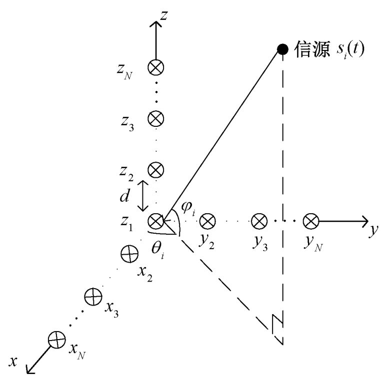


图 1　双 L 型阵列结构

Fig. 1　Two L-shaped arrays

每个天线后连接一个随机解调通道,如图 2 所示,接收的信号首先在混频器与一个混频序列相乘,本文采用伪随机序列作为混频序列。混频后的信号再通过一个截止频率为 $f_s/2$ 的低通滤波器滤波,最后以 f_s 的频率进行低速采样。为了简便,令 $f_s=f_p=1/T_p$。

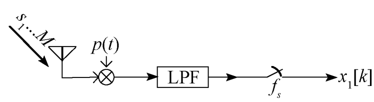


图 2　随机解调通道结构

Fig. 2　The structure of random demodulation channel

2　载频与 2D-DOA 联合估计

2.1　频域分析

定义入射的第 i 个目标信号与 x 轴、y 轴和 z 轴正方向的夹角分别为 α_i、β_i 和 γ_i。由空间几何关系可得:

$$\cos\alpha_i=\cos\theta_i\cos\varphi_i$$
$$\cos\beta_i=\sin\theta_i\cos\varphi_i$$
$$\cos\gamma_i=\sin\varphi_i \tag{2}$$
$$\cos^2\alpha_i+\cos^2\beta_i+\cos^2\gamma_i=1 \tag{3}$$

x 轴正方向上的第 n 个天线接收的信号 $u_n^x(t)$ 可以表示为:

$$u_n^x(t)=\sum_{i=1}^{M}A_i e^{j2\pi f_i(t+\tau_n^x(\alpha_i))} \tag{4}$$

其中,$\tau_n^x(\alpha_i)=\frac{dn}{c}\cos\alpha_i$,表示 x 轴第 n 个天线与原点处天线接收的信号之间存在的相位差。定义 y 轴和 z 轴阵元接收的信号为 $u_n^y(t)$ 和 $u_n^z(t)$,相位差分别为 $\tau_n^y(\beta_i)=\frac{dn}{c}\cos\beta_i$ 和 $\tau_n^x(\gamma_i)=\frac{dn}{c}\cos\gamma_i$。

对接收信号进行傅里叶变换可得：

$$U_n^x(f)=\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\cdot e^{jk2\pi f_i t}e^{j2\pi f_i \tau_n^x(\theta_i)} \tag{5}$$

其中，$\alpha_i=A_i\frac{1}{T}\int_T e^{-j2\pi f_i t}\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt$ 是目标信号 $s_i(t)$ 的傅里叶级数系数。$u_n^x(t)$ 为一个多频点信号，经过混频后可得：

$$U_n^x(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^{M}\alpha_i\cdot e^{jk2\pi f_i t}e^{j2\pi f_i\tau_n^x(\theta_i)}\right)p(t)e^{-j2\pi ft}dt=\sum_{i=1}^{M}e^{j2\pi f_i\tau_n^x(\theta_i)}\cdot\alpha_i P(f-l_i f_p) \tag{6}$$

其中，$P(f)$ 表示 $p(t)$ 的傅里叶变换形式，$l_i=[f_i/f_p]$，f_p 是混频序列的周期频率。经过低通滤波后的第 n 个通道的信号的傅里叶变换可以表示为：

$$X_n(f)=\sum_{i=1}^{M}e^{j2\pi f_i\tau_n^x(\alpha_i)}\cdot\alpha_i P(f-l_i f_p)H(f),f\in \boldsymbol{F}_s \tag{7}$$

定义 $W_i(f)=\alpha_i P(f-l_i f_p)H(f)$。经过采样速率为 $f_s=1/T_s$ 的低速采样后，式(7)可写成如下矩阵形式：

$$\boldsymbol{X}(f)=\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{W}(f) \tag{8}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{X}(f)$ 第 n 个元素为 $X_n(f)=X_n(e^{j2\pi fT_s})$；向量 $\boldsymbol{W}(f)$ 的第 i 个元素为 $W_i(f)=W_i(e^{j2\pi fT_s})$。矩阵 $\boldsymbol{A}_x$ 为阵列流型矩阵，其中元素仅包含未知载频 f_i 和延时 $\tau_n^x(\alpha_i)$，定义如式(9)。

$$\boldsymbol{A}_x=\begin{bmatrix} e^{j2\pi f_1\tau_1{}^x(\alpha_1)} & \cdots & e^{j2\pi f_M\tau_1{}^x(\alpha_M)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ e^{j2\pi f_1\tau_N{}^x(\alpha_1)} & \cdots & e^{j2\pi f_M\tau_N{}^x(\alpha_M)}\end{bmatrix}_{N\times M} \tag{9}$$

同理，对于 y 轴和 z 轴的采样信号有：

$$\boldsymbol{Y}(f)=\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{W}(f)$$
$$\boldsymbol{Z}(f)=\boldsymbol{A}_z\boldsymbol{W}(f) \tag{10}$$

其中，向量 $\boldsymbol{Y}(f)$、$\boldsymbol{Z}(f)$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}_y$、$\boldsymbol{A}_z$ 的定义类似。因此在时域有：

$$\boldsymbol{x}[k]=\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{w}[k]$$
$$\boldsymbol{y}[k]=\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{w}[k]$$
$$\boldsymbol{z}[k]=\boldsymbol{A}_z\boldsymbol{w}[k] \tag{11}$$

其中，$\boldsymbol{x}[k]$ $\boldsymbol{y}[k]$ 和 $\boldsymbol{z}[k]$ 分别为 x 轴、y 轴和 z 轴得到的采样值；$\boldsymbol{w}[k]$ 是长度为 M 的向量，第 i 个元素为 $w_i[k]$。

2.2 重构方法

将 x 轴、y 轴和 z 轴上的天线阵列均分为两个子阵列，第 1 个子阵由传感器 $\{1,\cdots,N-1\}$ 组成，第 2 个子阵由传感器 $\{2,\cdots,N\}$ 组成，对于采样值来说有：

$$\boldsymbol{x}_1[k]=\boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{w}[k],\boldsymbol{x}_2[k]=\boldsymbol{A}_{x_2}\boldsymbol{w}[k]$$
$$\boldsymbol{y}_1[k]=\boldsymbol{A}_{y_1}\boldsymbol{w}[k],\boldsymbol{y}_2[k]=\boldsymbol{A}_{y_2}\boldsymbol{w}[k]$$
$$\boldsymbol{z}_1[k]=\boldsymbol{A}_{z_1}\boldsymbol{w}[k],\boldsymbol{z}_2[k]=\boldsymbol{A}_{z_2}\boldsymbol{w}[k] \tag{12}$$

其中，向量 $\boldsymbol{x}_1[k]$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}_{x_1}$ 是向量 $\boldsymbol{x}[k]$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}_x$ 的前 $N-1$ 行；$\boldsymbol{x}_2[k]$ 和 $\boldsymbol{A}_{x_2}$ 是向量 $\boldsymbol{x}[k]$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}_x$ 的后 $N-1$ 行。同理 $\boldsymbol{y}_1[k]$、$\boldsymbol{y}_2[k]$、$\boldsymbol{z}_1[k]$、$\boldsymbol{z}_2[k]$ 和 $\boldsymbol{A}_{y_1}$、$\boldsymbol{A}_{y_2}$、$\boldsymbol{A}_{z_1}$、$\boldsymbol{A}_{z_2}$ 类似。

由于每个轴的两个子阵列接收的信号之间有固定的相位差，因此对应的两个阵列流型矩阵之间也有如式(13)所示的关系。

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_{x_2}=\boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{\Phi}_x\\ \boldsymbol{A}_{y_2}=\boldsymbol{A}_{y_1}\boldsymbol{\Phi}_y\\ \boldsymbol{A}_{z_2}=\boldsymbol{A}_{z_1}\boldsymbol{\Phi}_z\end{cases} \tag{13}$$

这种关系称为旋转不变关系，其中 $\boldsymbol{\Phi}_x$、$\boldsymbol{\Phi}_y$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_z$ 分别对应 x 轴、y 轴和 z 轴的旋转矩阵，均为 $M\times M$ 的对角阵，其中元素如式(14)所示。

$$\begin{cases}\boldsymbol{\Phi}_x=\mathrm{diag}[e^{j\frac{2\pi f_1 d}{c}\cos\alpha_1},\cdots,e^{j\frac{2\pi f_M d}{c}\cos\alpha_M}]\\ \boldsymbol{\Phi}_y=\mathrm{diag}[e^{j\frac{2\pi f_1 d}{c}\cos\beta_1},\cdots,e^{j\frac{2\pi f_M d}{c}\cos\beta_M}]\\ \boldsymbol{\Phi}_z=\mathrm{diag}[e^{j\frac{2\pi f_1 d}{c}\cos\gamma_1},\cdots,e^{j\frac{2\pi f_M d}{c}\cos\gamma_M}]\end{cases} \tag{14}$$

计算如式(15)的相关矩阵。

$$\boldsymbol{R}_1=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{H}}\}=\boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{A}_{y_1}^{\mathrm{H}}$$
$$\boldsymbol{R}_2=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{H}}\}=\boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{\Phi}_x\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{A}_{y_1}^{\mathrm{H}}$$
$$\boldsymbol{R}_3=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{H}}\}=\boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{\Phi}_y^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{A}_{y_1}^{\mathrm{H}}$$
$$\boldsymbol{R}_4=\mathrm{E}\{\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{H}}\}=\boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{\Phi}_x\boldsymbol{\Phi}_y^{\mathrm{H}}\boldsymbol{R}_w\boldsymbol{A}_{y_1}^{\mathrm{H}} \tag{15}$$

其中，$\mathrm{E}\{\cdot\}$ 表示取数学期望；$\boldsymbol{R}_w=\mathrm{E}\{\boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^{\mathrm{H}}\}$ 为互相关矩阵。由于本文假设不同的目标的信号之间是相互独立的，因此互相关矩阵 $\boldsymbol{R}_w$ 除对角线上的元素外均为 0。构造如式(16)的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}$。

$$\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{R}_1;\boldsymbol{R}_2;\boldsymbol{R}_3;\boldsymbol{R}_4] \tag{16}$$

对协方差矩阵 $\boldsymbol{R}$ 进行奇异值分解操作，定义 $\boldsymbol{U}$ 为分解得到的前 M 个非零的奇异值所对应的左奇异向量。存在一个 $M\times M$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得式(17)成立。

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{U}_2\\ \boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{U}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{x_1}\\ \boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{\Phi}_x\\ \boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{\Phi}_y^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{A}_{x_1}\boldsymbol{\Phi}_x\boldsymbol{\Phi}_y^{\mathrm{H}}\end{bmatrix}\boldsymbol{T} \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{U}$ 是一个 $4(N-1)\times M$ 的矩阵；$\boldsymbol{U}_i$ 为 $(N-1)\times M$ 的矩阵，$i=1,2,3,4$。为了书写简介，定义如式(18)、(19)的矩阵 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$：

$$\boldsymbol{V}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{U}_3\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_2\\ \boldsymbol{U}_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi}_x\boldsymbol{T}^{-1} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{V}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_1\\ \boldsymbol{U}_2\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_3\\ \boldsymbol{U}_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi}_y^{\mathrm{H}}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{19}$$

其中，$(\cdot)^{\dagger}$ 表示伪逆；对矩阵 $\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2$ 进行特征值分解，可以得到对应的特征向量矩阵 $\hat{\boldsymbol{T}}$，利用式(20)就可

计算得到旋转不变矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_x$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_y$。

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_x = \hat{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{V}_1\hat{\boldsymbol{T}}$$
$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_y = (\hat{\boldsymbol{T}}^{-1}\boldsymbol{V}_2\hat{\boldsymbol{T}})^{\mathrm{H}} \tag{20}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_x$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_y$ 的元素为顺序对应的。接着利用 x 轴和 z 轴的采样值也可得特征值矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}'_x$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}'_z$。

2.3　配对方法

目前得到两组特征值顺序对应的特征值 $\{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_x, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_y\}$ 和 $\{\hat{\boldsymbol{\Phi}}'_x, \hat{\boldsymbol{\Phi}}'_z\}$，但由于此时这两组旋转矩阵之间的顺序并不对应，因此还需要进行一个额外的配对步骤，调整对角阵 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}'_x$ 中特征值的顺序，来实现 $\{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_x, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_y\}$ 和 $\{\hat{\boldsymbol{\Phi}}'_x, \hat{\boldsymbol{\Phi}}'_z\}$ 的元素一一对应，进而达到三维参数配对的目的。我们寻找一个置换矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$，令其满足式(21)。

$$\hat{\boldsymbol{\Xi}} = \underset{\Xi}{\arg\min} \| \hat{\boldsymbol{\Phi}}_x - \hat{\boldsymbol{\Phi}}'_x \Xi \| \ \text{s.t.}\ \forall \boldsymbol{\Xi}_{i,j} = \{0,1\} \tag{21}$$

通过式(22)调整矩阵 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_z$ 中元素的顺序。

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_z = \hat{\boldsymbol{\Phi}}'_z \hat{\boldsymbol{\Xi}} \tag{22}$$

此时就得到了特征值一一对应的旋转不变矩阵组 $\{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_x, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_y, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_z\}$，接下来就可以直接利用矩阵中的元素来估计目标的载频 $\{f_i\}_{i=1}^M$，方位角 $\{\theta_i\}_{i=1}^M$ 和俯仰角 $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$。

定义 u_i、v_i 和 w_i 分别为旋转矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_x$、$\boldsymbol{\Phi}_y$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_z$ 对角线上的第 i 个元素，$i = 1, 2, \cdots, M$，有：

$$\begin{aligned} \frac{2\pi f_i d}{c}\cos\alpha_i &= \angle(u_i) \\ \frac{2\pi f_i d}{c}\cos\beta_i &= \angle(v_i) \\ \frac{2\pi f_i d}{c}\cos\gamma_i &= \angle(w_i) \end{aligned} \tag{23}$$

其中，$\angle(\cdot)$ 为求复数的相位角。式(3)和(23)联立可得：

$$f_i = \frac{c \cdot \sqrt{\angle^2(u_i) + \angle^2(v_i) + \angle^2(w_i)}}{2\pi d} \tag{24}$$

联立式(2)、(3)和(23)可得

$$\theta_i = \arctan\frac{\angle(v_i)}{\angle(u_i)} \tag{25}$$

$$\varphi_i = \arccos\left(\sqrt{\frac{\angle^2(u_i) + \angle^2(v_i)}{\angle^2(u_i) + \angle^2(v_i) + \angle^2(w_i)}}\right) \tag{26}$$

得到载频、方位角和俯仰角的值后，即可代入式(9)计算得到矩阵 $\boldsymbol{A}_x$、$\boldsymbol{A}_y$ 和 $\boldsymbol{A}_z$，进而利用式(27)重构目标信号。

$$\boldsymbol{U}_s(f) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_x \\ \boldsymbol{A}_y \\ \boldsymbol{A}_z \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}(f) \\ \boldsymbol{Y}(f) \\ \boldsymbol{Z}(f) \end{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_S^{\dagger} \tag{27}$$

其中，$(\cdot)^{\dagger}$ 表示伪逆；$\boldsymbol{U}_s(f)$ 为原信号的频谱；$\boldsymbol{\Theta}$ 为感知矩阵；$\boldsymbol{\Theta}_S$ 表示感知矩阵 $\boldsymbol{\Theta}$ 在信号频点位置索引集 S 的所有列的子阵；元素 $\theta_{m,n}$ 可以由式(28)求得。

$$\theta_{m,n} = \int_0^{mT_s} \psi_k(\tau) p(\tau) h(mT_s - \tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{28}$$

3　仿真结果

对本文提出的基于双 L 型阵列随机解调的 ESPRIT 算法以及奈奎斯特采样条件下的 ESPRIT 方法进行对比分析。实验中使用的信号均根据 1.1 节定义的窄带信号模型由 MATLAB 仿真生成。定义均方根误差 root ean squard error，RMSE)[20] 作为载频和 2D-DOA 估计准确度的评价参数。

$$RMSE\_f = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(f_i - \hat{f}_i)^2} \tag{29}$$

$$RMSE\_\theta = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\theta_i - \hat{\theta}_i)^2} \tag{30}$$

$$RMSE\_\varphi = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}(\varphi_i - \hat{\varphi}_i)^2} \tag{31}$$

其中，$\hat{f}_i$、$\hat{\theta}_i$ 和 $\hat{\varphi}_i$ 分别为载频、方位角和俯仰角的估计值。定义均方误差(mean squared error，MSE)[25] 作为信号重建的评价参数：

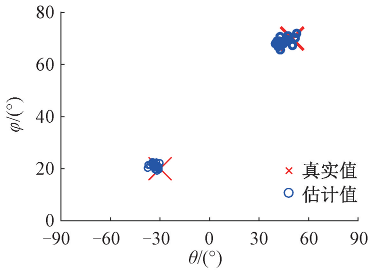
$$MSE = \frac{1}{N}\| x - \hat{x} \|^2 \tag{32}$$

其中，$\hat{x}$ 为重构信号；x 为原始信号。

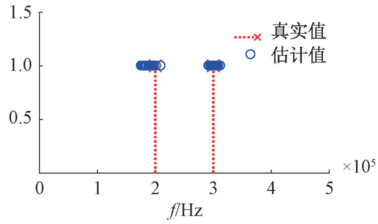
设置目标个数 $M = 2$，目标信号的奈奎斯特频率为 $f_{Nyq} = 10\text{GHz}$。每个目标的载频 f_i 均在 $(0, (f_{Nyq} - B)/2)$ 范围内随机选取，方位角 θ_i 在 $(-90°, 90°)$ 范围内随机选取，俯仰角 φ_i 在 $(0°, 90°)$ 范围内随机选取。每个方向上的天线个数均为 $N = 6$，因此总的天线个数为 $3N - 2 = 16$ 个。阵元间距 $d = 0.03$ m，每个通道采样率设置为 $f_s = 0.5$ GHz。

验证算法的有效性，设置信噪比 $SNR = 10$ dB，重复仿真实验 20 次，每次实验使用的混频序列与噪声均为随机生成。图 4 所示为 20 次实验 2D-DOA 和载频的估计值与真实值的对比，可以看出在信噪比为 10 dB 的情况下对不同的传感器阵元个数进行仿真实验。设置信噪比 $SNR = 10$ dB，每个轴的天线个数从临界最小个数 $N = M + 1 = 3$ 到 $N = 10$ 递增，步进值为 1。仿真结果如图 5 所示，给出了载频和 2D-DOA 的均方根误差以及信号重构的均方误差随天线个数变化的曲线。从图 5 可以看出，随着天线个数的增加，载频和 2D-DOA 的估计效果和目标重构的效果均逐渐变好，在 $N > 2M$ 后曲线逐渐趋于平缓，估计效果增加的不明显。

对提出的阵列随机解调方法与奈奎斯特采样条件下的 ESPRIT 方法以及文献[26]的基于网格压缩感知的二



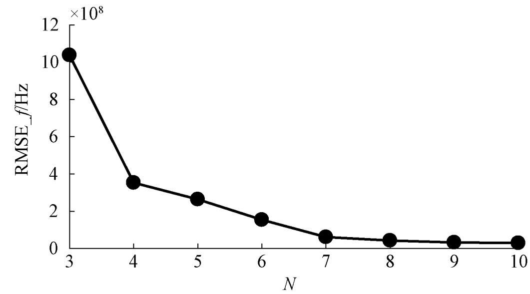
(a) 2D-DOA估计值与真实值的对比
(a) Comparison of the estimated2D-DOA with the true value



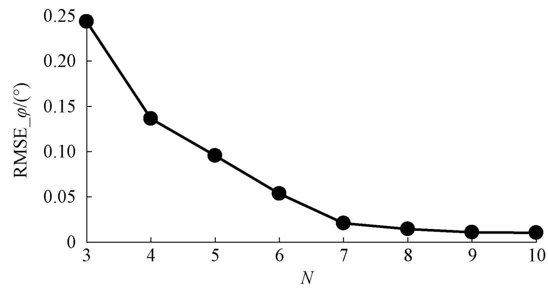
(b) 载频估计值与真实值的对比
(b) Comparison of the estimated carrier frequencies with the true value

图 4 参数估计值与真实值的对比

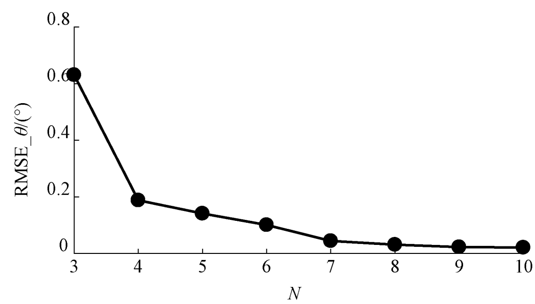
Fig. 4 Comparison of the estimated parameters with the true value



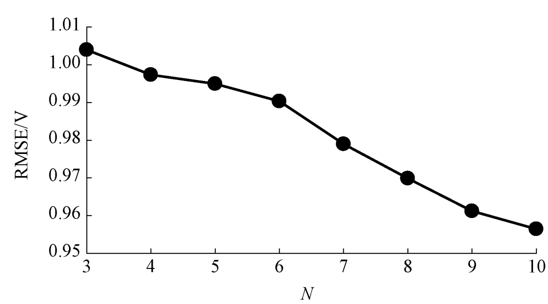
(a) 不同阵元个数下载频估计效果
(a) Perfo rmance of carrier frequency under different N



(b) 不同阵元个数下方位角估计效果
(b) Performance of azimuth angleunder different N



(c) 不同阵元个数下俯仰角估计效果
(c) Performance of elevation angle under different N



(d) 不同阵元个数下恢复信号效果
(d) Performance of recovered signal under different N

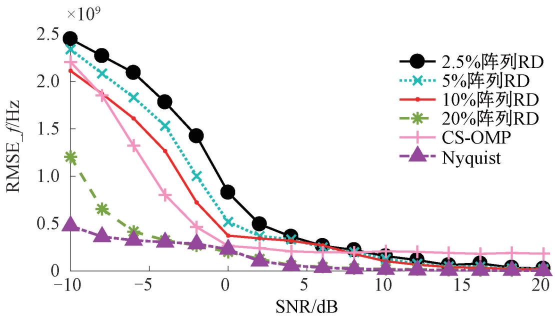
图 5 不同阵元个数下的估计效果

Fig. 5 Performance under different N

维 DOA 与载频联合估计方法进行了对比。对于阵列式 RD 选择每通道采样率的压缩比 f_s/f_{nyq} 为 2.5%、5%、10%、20%，其他参数设置与上述仿真相同。CS-OMP 算法设置压缩比为 2.5%，其他参数设置如阵元个数等均与阵列式 RD 相同。在目标信号上叠加加性高斯白噪声，设置信噪比从−10 到 20 dB 递增，步进值为 2 dB。仿真结果如下，图 6 所示为在不同压缩比下的阵列随机解调方法以及奈奎斯特采样方法和基于压缩感知的网格 OMP 算法估计的载频和 2D-DOA 的均方根误差随信噪比变化的曲线。

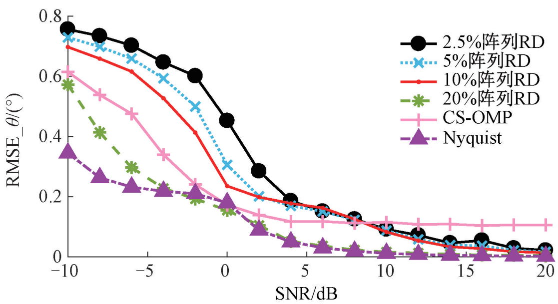
可以发现，随着噪声越来越小，载频和 2D-DOA 的估计误差越来越小。同时，随着压缩比的增加，也就是随着每通道采样率的增加，估计的效果也越来越好。在压缩比达到 20%时效果已接近奈奎斯特采样条件下的 ESPRIT 方法。另外，可以发现我们的算法抗噪性比基于 CS 的网格 OMP 算法稍差。但基于 CS 的网格 OMP 算法的重构精度取决于网格的大小以及参数是否正好落于网格上，因此信噪比较高时，估计参数的误差仍会受到网格大小的限制。同时文献[24]算法只能估计 $\theta_i \in (0°, 90°)$ 内的角度，否则会发生角度模糊，本文提出的方法可以估计范围在(−90°, 90°)之内的角度，因此适用性更好。

将不同压缩比下的阵列式随机解调方法与普通的单通道随机解调结构[13]重构的信号波形的效果进行了对比，如图 7 所示，设置单通道随机解调的压缩比为 20%，信噪比从−10 dB 到 38 dB 递增，步进值为 2 dB。从图 7 可以发现，阵列式随机解调结构由于通道数较多，因此信号的重构效果也优于普通的单通道随机解调。当阵列式随机解调压缩比为 2.5%时，比压缩比为 10%的随机解调系统效果更好，因此阵列式随机解调系统相比普通随机解调系统可以适当地降低单通道采样率。



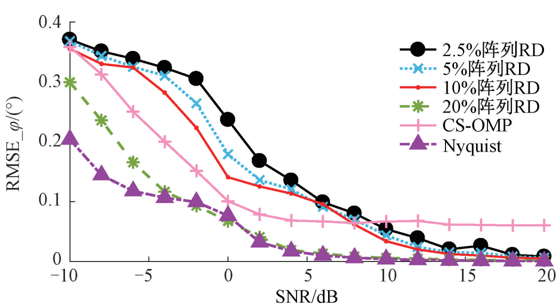
(a) 不同信噪比下载频估计效果对比

(a) Performance comparison of carrier frequency under different SNRs



(b) 不同信噪比下方位角估计效果

(b) Performance comparison of azimuth angleunder different SNRs



(c) 不同信噪比下俯仰角估计效果

(c) Performance comparison of elevation angle under different SNRs

图 6　不同信噪比下的参数估计效果

Fig. 6　Performance under different SNR

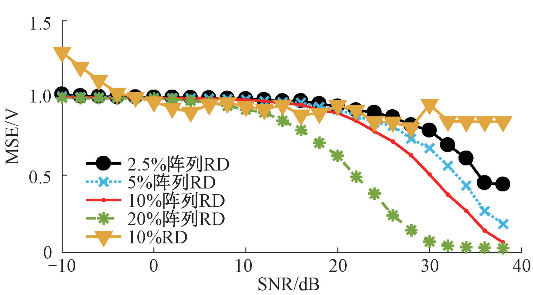


图 7　不同信噪比下的信号重构效果

Fig. 7　Performance of signal reconstruction under different SNRs

4 结　论

本文提出了一种基于阵列式随机解调的联合载频和 2D-DOA 的估计方法，将 ESPRIT 算法扩展到三维，解决了载频和 2D-DOA 参数的配对问题。可以从少量样本中估计目标信号的频率、方位角和俯仰角，并重构目标信号。仿真结果充分验证了该方法的有效性。

参考文献

[1] MUCHANDI V I, RAGHAVENDRA C G. Analysis of multi-tone signal for radar application [C]. 2016 International Conference on Communication and Signal Processing (ICCSP). IEEE, 2016.

[2] RAMAMOHAN S, DANDAPAT S. Sinusoidal model-based analysis and classification of stressed speech[J]. IEEE Transactions on Audio, Speech and Language Processing, 2006, 14(3):737-746.

[3] SHIRAZI J, GHAEMMAGHAMI S, RAZZAZI F. Improvements in audio classification based on sinusoidal modeling [C]. IEEE International Conference on Multimedia & Expo. IEEE Computer Society, 2008.

[4] E S AZAROV, M I VASHKEVICH, A PETROVSKY. Estimation of the instantaneous signal parameters using a modified Prony ' s method [J]. Automatic Control & Computer Sciences, 2015.

[5] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4):1289-1306.

[6] 庄晓燕, 赵贻玖. 谱稀疏信号随机等效采样重构方法研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2015, v. 29; No. 178(10):99-104.

ZHUANG X Y, ZHAO Y J. Study on random equivalent sampling based spectral sparse signal reconstruction[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2015, 29(10): 1507-1512.

[7] 李寰驰, 袁伟明, 张锐. 基于压缩感知的雷达目标辨识[J]. 电子测量技术, 2017, 40(11).

LI H C, YUAN W M, ZHANG R. Radar target recognition based on compressed sensing[J]. Electronic Measurement Technology, 2017, 40(11).

[8] 赵鑫, 李东新. 高斯随机观测矩阵的改进[J]. 国外电子测量技术, 2017, 36(5):25-29.

ZHAO X, LI D X. Improvement of Gauss random measurement matrix[J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2017, 36(5):25-29.

[9] 胡久松,刘宏立,肖郭璇,徐琨. 一种基于压缩感知与最近邻的联合定位方法[J]. 电子测量与仪器学报, 2018,32(6):72-78.

HU J S, LIU H L, XIAO G X, et al. Joint location method based on compressed sensing and nearest neighbor[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2018,32(6):72-78.

[10] 王学伟,杨京. 动态测试信号模型及电能压缩感知测量方法[J]. 仪器仪表学报, 2019, 40(1): 92-100.
WANG X W, YANG J. Dynamic test signal model and the electric energy measurement method based on compressed sensing[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019,40(1):92-100.

[11] CANDÈ E J, WAKIN M B. An Introduction to compressive sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.

[12] TROPP J A, WAKIN M B. Random filters for compressive sampling and reconstruction [C]. 2006 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2006. 5.

[13] KIROLOS S, LASKA J, WAKIN M, et al. Analog-to-information conversion via random demodulation [C]. 2006 IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software, Richardson, Texas, USA, 2006: 71-74.

[14] MISHALI M, ELDAR Y C. Blind multiband signal reconstruction: Compressed sensing for analog signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(3):993-1009.

[15] MISHALI M, ELDAR Y C. From theory to practice: Sub-nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2):375-391.

[16] MISHALI M, ELDAR Y C, DOUNAEVSKY O, et al. Xampling: Analog to digital at sub-nyquist Rates[J]. IET Circuits Devices & Systems, 2009, 5(1):8-20.

[17] MALIOUTOV D, CETIN M, WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(8):3010-3022.

[18] 沈志博, 赵国庆, 董春曦,等. 基于压缩感知的频率和 DOA 联合估计算法[J]. 航空学报, 2014, 35(5): 1357-1364.
SHEN Z B, ZHAO G Q, DONG C X, et al. United frequency and DOA estimation algorithm based on compressed sensing [J]. Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica, 2014, 35(5):1357-1364.

[19] 陈玉龙, 黄登山. 基于压缩感知的二维 DOA 估计[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(28):159-163.
CHEN Y L, HUANG D S. Two dimensional DOA estimation based on compressed sensing[J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(28):159-163.

[20] LIANG L, JIANFENG G, PING W. Joint DOA and frequency estimation with sub-Nyquist sampling [J]. Signal Processing, 2019, 154:87-96.

[21] LIANG L, PING W, HUAGUO Z. Joint DOA and frequency estimation with sub-Nyquist sampling based on trilinear decomposition and SVD [C]. IEEE International Conference on Computer and Communications, Chengdu, 2017, 843-847.

[22] LIANG L, PING W. Joint DOA and frequency estimation with sub-Nyquist sampling for more sources than sensors[J]. Iet Radar Sonar & Navigation, 2017, 11(12):1798-1801.

[23] LIANG L, PING W. Joint DOA and frequency estimation with sub-Nyquist sampling in the sparse array system[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2016, 25(9):1285-1289.

[24] STEIN S, YAIR O, COHEN D, et al. Joint spectrum sensing and direction of arrival recovery from sub-Nyquist samples [C]. IEEE International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications. 2015: 331-335.

[25] STEIN S, YAIR O, COHEN D, et al. CaSCADE: Compressed carrier and DOA estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65 (10): 2645-2658.

[26] ESMAEIL R, MOHAMAD F S, SEYYED M S. Joint frequency and two-dimensional direction of arrival estimation for Electronic Support systems based on sub-Nyquist sampling[J]. IET Radar Sonar & Navigation, 2018, 12(8):889-899.

作者简介

张钧,1995 年于南京航空航天大学获得学士学位,2010 年于哈尔滨工业大学获得硕士学位,现为北京遥感设备研究所研究员,主要研究方向为雷达探测。
E-mail:zhang_jun25@ sina. com

Zhang Jun received his B. Sc. degree in 1995 from Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, received his M. Sc. degree in 2010 from Harbin Institute of Technology. Now he is a research professor in Beijing Institute of Remote Sensing Equipment. His main research interest is in radar detection.

姜思仪,2019 年于哈尔滨工业大学获得硕士学位,现为哈尔滨工业大学博士研究生,主要研究方向为压缩感知。
E-mail:jiangsiyi_hit@ 163. com

Jiang Siyi received her M. Sc. degree in 2019 from Harbin Institute of Technology. Now she is a Ph. D. candidate at Harbin Institute of Technology. Her main research interest is in compressed sensing.

彭喜元,1992 年于哈尔滨工业大学获得博士学位,现为哈尔滨工业大学教授、博导,主要研究方向为测试理论、技术及系统,电子系统故障预测与健康管理。
E-mail:pxy@ hit. edu. cn

Peng Xiyuan received his Ph. D. degree in 1995 from Harbin Institute of Technology. Now he is a professor and Ph. D. supervisor at Harbin Institute of Technology. His main research interest is in test theory, technique and system, electronic system failure prediction and health management.