

DOI: 10.13382/j.jemi.B2306741

# 接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定<sup>\*</sup>

李红莉<sup>1,2</sup>  陈志文<sup>1,2</sup>  张祖杨<sup>1,2</sup>  赵志浩<sup>1,2</sup>  黄强先<sup>1,2</sup>  张连生<sup>1,2</sup>  程荣俊<sup>1,2</sup>

(1. 合肥工业大学仪器科学与光电工程学院  合肥  230009;  
2. 合肥工业大学测量理论与精密仪器安徽省重点实验室  合肥  230009)

**摘  要:**针对贝叶斯不确定度评定中获取测量模型后验分布困难的问题,给出一种基于接受-拒绝采样思想实现贝叶斯测量不确定度评定的方法。面向线性/非线性测量模型,先利用贝叶斯假设或蒙特卡洛法获得被测量的先验信息,再基于接受-拒绝采样获得被测量的接受采样点形成后验分布,对被测量进行统计推断得到测量不确定度评定结果。通过规范示例和实际测量评定实例,验证了采用接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定方法相较于传统 GUM 和 MCM 评定方法,能够得到可靠评定结果,且获取贝叶斯后验分布过程简便,在无/有历史信息条件下测量不确定度评定应用中具有可行性和实用性。

**关键词:** 测量不确定度;贝叶斯统计;接受-拒绝采样;蒙特卡洛方法

**中图分类号:** TB9;TN06    **文献标识码:** A    **国家标准学科分类代码:** D410.55

## Bayesian uncertainty evaluation based on accept-reject algorithm

Li Hongli<sup>1,2</sup>  Chen Zhiwen<sup>1,2</sup>  Zhang Zuyang<sup>1,2</sup>  Zhao Zhihao<sup>1,2</sup>

Huang Qiangxian<sup>1,2</sup>  Zhang Liansheng<sup>1,2</sup>  Cheng Rongjun<sup>1,2</sup>

(1. School of Instrument Science and Opto-Electronics Engineering, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China;

2. Anhui Province Key Laboratory of Measuring Theory and Precision Instrument,  
Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

**Abstract:** Aiming at the difficulty of obtaining the posterior distribution of measurement model in Bayesian uncertainty evaluation, a method based on accept-reject sampling is proposed to realize Bayesian measurement uncertainty evaluation. For linear/nonlinear measurement model, the prior information being measured is obtained by using Bayesian hypothesis or Monte Carlo method, the accepted sampling points being measured are obtained based on accept-reject sampling. Then the posterior distribution is formed based on these accepted sampling points, and the measurement uncertainty evaluation results are obtained by statistical inference. Through the two evaluation examples which come from the specification and practical measurement application, it is verified that the Bayesian uncertainty evaluation method using the accept-reject algorithm can obtain reliable evaluation results compared with traditional GUM and MCM methods, the process of obtaining the Bayesian posterior distribution is simple, and it is feasible and practical in the application of measurement uncertainty evaluation under the condition of without/with historical information.

**Keywords:** measurement uncertainty; Bayesian statistics; accept-reject sampling; Monte Carlo method

## 0  引  言

目前,由多个国际组织联合发布的《测量不确定度表示指南》(GUM)和它的补充文件 GUM-S1<sup>[1]</sup>提供的两种

不确定度评定方法已应用于整个计量学中<sup>[2-5]</sup>。其中 GUM-S1 法不确定度评定不仅适用于线性测量模型而且适用于非线性测量模型或被测量符合非高斯分布的情况,它在不确定度评定过程中采用蒙特卡洛采样的策略<sup>[6-8]</sup>。但 GUM 和 GUM-S1 法都是以现有的数据为基础

进行测量不确定度评定,而忽略了有关被测量的先验信息。在实际的测量工作中,通常可以获得有关被测量的一些先验信息,比如以前同环境条件下获得的测量结果、更高级精密仪器所测量的结果、相关专家所给出的经验数据等,这些被测量的先验信息包含着被测件本身的一些信息因素<sup>[8]</sup>。而利用贝叶斯统计思想可以将先验信息与样本信息相融合成最新的数据信息<sup>[10-12]</sup>,因此将贝叶斯统计思想运用于测量不确定度评定过程中,能够获得更加全面准确的测量不确定度。

贝叶斯方法相对于 GUM 和 GUM-S1 方法不同之处是融合了被测量的先验信息,获得被测量的标准不确定度偏小<sup>[13]</sup>。因此,对贝叶斯测量不确定度评定方法的理论研究已逐渐深入<sup>[14-15]</sup>。然而在实际使用贝叶斯方法进行不确定度评定时,常常面临评定过程中的一些难点,主要表现为有关测量模型后验分布获取困难。如果由贝叶斯公式直接通过积分求取后验分布,一般求解过程非常困难,为避免复杂的积分求解,可以采用马尔可夫链蒙特卡洛(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)方法对后验分布进行采样,但如何判断出采样已达到平稳状态仍较困难<sup>[16-17]</sup>。这些问题都会影响后续被测量不确定度的统计推断。为了方便获取被测量后验分布,德国物理技术研究院(Physikalisch-Technische Bundesanstalt, PTB)初步提出了一种基于拒绝的蒙特卡洛抽样方法实现贝叶斯不确定度评定,并通过基本示例从理论层面证明了该方法适用于具有先验信息的贝叶斯不确定度评定<sup>[18]</sup>。本文在此基础上,进一步深入研究接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定方法,给出了评定原理、评定流程及其关键技术,并结合具体的标准示例/实际应用实例,验证了基于接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定方法对于线性/非线性测量模型在无/有历史信息条件下的测量不确定度评定应用中的可行性和实用性。

## 1 贝叶斯不确定度评定思想

贝叶斯统计原理在贝叶斯公式的基础上形成,并在测量不确定度分析领域中逐渐发展。通过测量不确定度分析可建立一般统计模型:

$$Y = \alpha(\theta)X + \beta(\theta) \quad (1)$$

其中,  $Y$  为被测量,  $X$  和  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  为被测量的影响因素。其中  $\theta$  为  $B$  类输入量,  $X$  为  $A$  类输入量, 对  $X$  进行的  $n$  次独立测量, 其值为  $x_1, \dots, x_n$ 。对于样本数据  $x_1, \dots, x_n \sim N(\frac{Y - \beta(\theta)}{\alpha(\theta)}, \sigma^2)$  其中  $\sigma^2$  为数据服从正态分布的方差参数。根据贝叶斯统计原理可以得到测量模型的联合后验分布公式<sup>[18]</sup>, 即:

$$\pi(Y, \theta, \sigma^2 | x_1, \dots, x_n) =$$

$$\frac{\pi(Y, \theta, \sigma^2) L(x_1, \dots, x_n | Y, \theta, \sigma^2)}{\int \pi(Y, \theta, \sigma^2) L(x_1, \dots, x_n | Y, \theta, \sigma^2) dY d\theta d\sigma^2} \quad (2)$$

其中,  $\pi(Y, \theta, \sigma^2)$  表示  $Y, \theta, \sigma^2$  的联合先验分布, 如果随机变量  $Y, \theta, \sigma^2$  相互独立, 则在测量数据参数无信息条件下, 根据 Jeffreys 先验能够得到  $\pi(Y, \theta, \sigma^2) = \pi(Y) \pi(\theta) / \sigma^2$ 。  $L(x_1, \dots, x_n | Y, \theta, \sigma^2)$  为样本似然函数, 表示统计模型中获得测量数据  $X = (x_1, \dots, x_n)$  的概率。

联合后验分布  $\pi(Y, \theta, \sigma^2 | x_1, \dots, x_n)$  包含了  $Y, \theta, \sigma^2$  的所有信息。由于式(2)中分母积分后为常数, 故联合后验分布由  $\pi(Y, \theta, \sigma^2)$  和  $L(x_1, \dots, x_n | Y, \theta, \sigma^2)$  的乘积决定, 即:

$$\begin{aligned} & \pi(Y, \theta, \sigma^2 | x_1, \dots, x_n) \\ & \propto \pi(Y, \theta, \sigma^2) L(x_1, \dots, x_n | Y, \theta, \sigma^2) \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\pi(Y, \theta, \sigma^2) L(x_1, \dots, x_n | Y, \theta, \sigma^2)$  称为后验分布的“核”。

通过对式(3)的联合后验分布中参数  $\theta, \sigma^2$  进行积分, 即可获得被测量  $Y$  的边缘后验分布<sup>[19]</sup>, 表示为:

$$\begin{aligned} & \pi(Y | x_1, \dots, x_n) = \\ & \int \frac{1}{m(x)} \pi(Y, \theta, \sigma^2 | x_1, \dots, x_n) d\theta d\sigma^2 \end{aligned} \quad (4)$$

由  $\pi(Y | x_1, \dots, x_n)$  即可推断得到被测量  $Y$  的最佳估计值、标准不确定度以及对应置信概率下的包含区间。但由式(4)可见, 一般直接通过积分求解  $\pi(Y | x_1, \dots, x_n)$  难度较大, 在实际测量评定中亟需探究方便获取贝叶斯后验分布的有效评定方法。

## 2 接受-拒绝采样的贝叶斯评定方法

### 2.1 基本原理

将式(1)给出的测量模型  $Y = \alpha(\theta)X + \beta(\theta)$  简化为:

$$Y = f(X, B) \quad (5)$$

其中,  $X$  为  $A$  类输入量,  $B$  为多个  $B$  类评定输入量的综合表示,  $Y$  为被测量。

由式(5)可转化  $X$  的求解模型:

$$X = g(Y, B) \quad (6)$$

对  $X$  进行  $n$  次独立测量得  $x_1, \dots, x_n$ , 由模型(6)可知  $x_1, \dots, x_n \sim N(g(Y, B), \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  为数据服从正态分布的方差参数。根据数据获得样本的均值和方差, 分别为  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ 。依据贝叶斯统计原理可以得模型(6)的后验分布公式, 即:

$$\pi(g(Y, B), \sigma^2 | x_1, \dots, x_n) =$$

$$\frac{\pi(g(Y, B), \sigma^2) L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B), \sigma^2)}{\int \pi(g(Y, B), \sigma^2) L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B), \sigma^2) dY dB d\sigma^2} \quad (7)$$

式中:  $\pi(g(Y, B), \sigma^2)$  为关于  $X$  的先验分布,  $L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B), \sigma^2)$  为样本似然函数。

先验分布  $\pi(g(Y, B), \sigma^2)$  即包含测量值的数据也包含其他  $B$  类信息, 在一定程度上是待求的后验样本的基础范围。在随机变量  $Y, B, \sigma^2$  相互独立的情况下, 则有  $\pi(g(Y, B), \sigma^2) = \pi(Y) \pi(B) \pi(\sigma^2)$ 。其中,  $\pi(Y)$  表示被测量  $Y$  的先验分布,  $\pi(B)$  表示所有  $B$  类输入量的联合先验分布,  $\pi(\sigma^2)$  表示  $X$  的数据方差参数的先验分布。

假设在数据方差参数无信息条件下进行贝叶斯不确定度评定, 可根据 Jeffreys 先验得到  $\pi(\sigma^2) = 1/\sigma^2$ , 则  $\pi(g(Y, B), \sigma^2) = \pi(Y) \pi(B) / \sigma^2$ 。同时, 在数据方差参数无信息条件下可推出对应的边际似然函数:

$$L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B)) = \int L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B), \sigma^2) d\sigma^2 = \frac{[(n-1)s^2 + n(\bar{x} - X)^2]^{-\frac{n}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (8)$$

由式(8)可知, 在测量样本  $x_1, \dots, x_n$  已知条件下, 似然函数是关于  $X$  的函数, 记为  $L(X)$ 。

基于接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定方法的总体思想为: 依据  $X$  的先验分布  $\pi(g(Y, B), \sigma^2)$  独立随机抽样并代入式(6)通过模型传递获得  $(X_1, \dots, X_n)$ , 作为待求  $X$  后验样本的基础范围, 再结合似然函数, 基于接受-拒绝思想构造约束条件, 在  $(X_1, \dots, X_n)$  中挑选出能够被接受的采样点, 通过这些采样点获得对应被测量先验分布的采样点  $y_i$ , 作为被测量后验样本数据, 再对后验样本统计推断得到被测量的最佳估计值、标准不确定度、包含区间等评定结果。

假设随机变量  $Y, B, \sigma^2$  相互独立, 以一般情况  $X$  数据方差参数无信息条件下为例, 具体说明接受-拒绝采样原理如下。由于  $\pi(g(Y, B), \sigma^2) = \pi(Y) \pi(B) / \sigma^2$ , 故对  $\pi(Y)$  和  $\pi(B)$  进行蒙特卡洛采样, 通过公式(6)传递获得  $(X_1, \dots, X_n)$ , 再由边际似然函数公式(8)得到  $L(X_i) = L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B))$ , 基于接受-拒绝思想判定  $(X_1, \dots, X_n)$  中接受的采样点。其过程是先设定一个便于采样的概率分布函数  $q(x)$ , 如高斯分布、均匀分布等, 再设定一个常量  $k$  使得函数  $L(X) = L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B))$  曲线总在  $kq(X)$  曲线下方, 满足  $\frac{L(X_i)}{kq(X_i)} \leq 1$ 。由于  $0 \leq kq(X_i) \leq 1$ , 故可简化为在均匀分布  $U[0, 1]$  上随机抽样一个值  $U_i$  与  $L(X_i)$  进行比较, 如果  $U_i \leq L(X_i)$ , 则表示采样点  $X_i$  出现的概率高, 则接受

该采样点, 否则拒绝该采样点。

## 2.2 评定流程及关键技术

假设随机变量  $Y, B, \sigma^2$  相互独立, 以一般情况  $X$  数据方差参数无信息为例, 基于接受-拒绝采样算法的贝叶斯不确定度评定步骤为:

1) 构建统计模型  $Y = f(X, B)$  以及转换模型  $X = g(Y, B)$ ;

2) 确定各参数的先验信息, 测量数据符合的分布  $\pi(X)$ 、 $B$  类信息的综合先验分布  $\pi(B)$ 、被测量  $Y$  在无先验信息条件下的先验分布或在有历史信息条件下的先验分布  $\pi(Y)$ ;

3) 利用蒙特卡洛方法(抽样次数为  $N$ ), 通过模型  $X = g(Y, B)$  传递获得采样点  $(X_1, \dots, X_n)$  作为测量值  $X$  的先验信息;

4) 再由测量数据获得模型  $X = g(Y, B)$  的边际似然函数  $L(x_1, \dots, x_n | X = g(Y, B))$ ;

5) 通过接受-拒绝采样原理, 在均匀分布  $[0, 1]$  获得值  $U_i$ , 与边际似然函数  $L(X_i)$  进行比较;

6) 当采样点  $U_i$  小于边际似然函数  $L(X_i)$ , 接受  $X_i$  并保存对应的  $y_i$ , 作为  $Y = f(X, B)$  的后验样本数据;

7) 对最终获得的  $Y$  后验样本的所有数据进行递增排序, 得到输出量的分布函数, 并由此统计得到被测量  $Y$  的最佳估计值、标准不确定度及包含区间等不确定度评定结果。

根据上述评定步骤设计出基于接受-拒绝采样算法的贝叶斯不确定度评定流程, 如图 1 所示。

在实际评定过程中, 一般根据已知测量系统相关信息和测量数据样本,  $\pi(B)$  和  $\pi(\sigma^2)$  相对容易获得。而对于获取被测量  $Y$  的先验分布  $\pi(Y)$ , 则需要考虑两种情况。一是当被测量首次进行不确定度评定时, 由于没有相关历史信息, 被测量  $Y$  的先验信息为无信息先验, 可根据贝叶斯假设条件对被测量的先验分布进行获取; 二是当被测量在有历史信息状态下进行测量不确定度评定时, 被测量使用历史信息作为  $Y$  的先验信息, 被测量的先验分布  $\pi(Y)$  可由测量数据和各  $B$  类概率密度函数结合蒙特卡洛方法获得。

## 3 评定实例

面向不同测量任务的不确定度评定应用, 给出质量校准和三维靶镜  $X$ - $Y$  反射面间正交偏差角评定两个实例, 应用 Python 软件编程实现基于接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定过程, 并将其评定结果与 GUM 和 MCM 方法所获评定结果进行对比, 验证接受-拒绝采样算法的贝叶斯不确定度评定方法在被测量无/有历史信息条件下的可行性, 及其在实际测量不确定度评定应用中的实

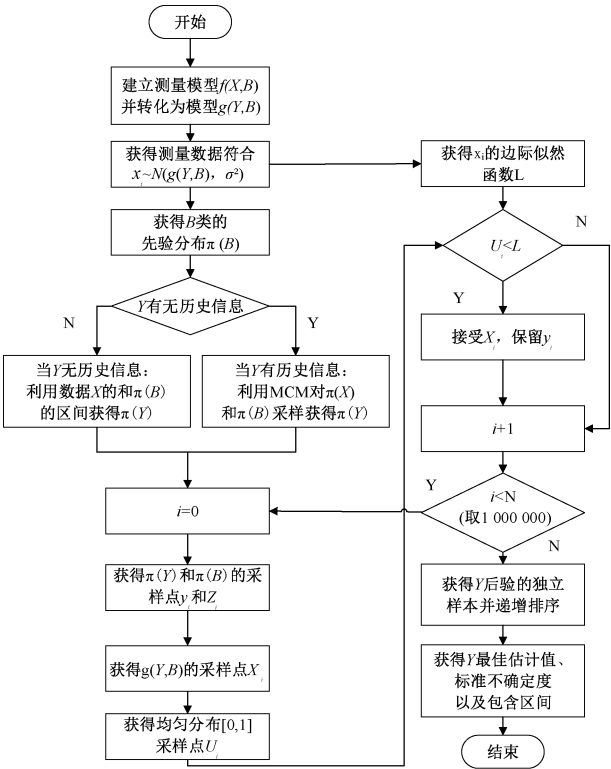


图 1 接受-拒绝采样算法的贝叶斯不确定度评定流程

Fig. 1 Assessment process of Bayesian uncertainty evaluation based on accept-reject algorithm

用性。

3.1 质量校准

质量校准示例来自 JJF 1059. 2-2012 的附录 B<sup>[1]</sup>。示例中校准输出结果  $\delta_m$  为待校准砝码  $W$  的折算质量  $m_{W,C}$

与其标称质量  $m_{nom}$  的偏差。 $m_{W,C}$  是在密度为  $\rho_{a0}(\rho_{a0} = 1.2 \text{ kg/m}^3)$  的空气中平衡配重的密度为  $\rho_0 = 8\,000 \text{ kg/m}^3$  的参考砝码质量,  $m_{nom} = 100 \text{ g}$ ,  $\delta_m$  的测量模型为:

$$\delta_m = (m_{R,C} + \delta_{m_{R,C}}) \left[ 1 + (\rho_a - \rho_{a0}) \left( \frac{1}{\rho_W} - \frac{1}{\rho_R} \right) \right] - m_{nom}$$

(9)

其中,  $m_{R,C}$  是校准用参考砝码  $R$  的折算质量,  $\delta_{m_{R,C}}$  表示校准时为了实现和待校准砝码  $W$  的平衡, 而加到参考砝码  $R$  上的密度为  $\rho_R$  的小砝码的折算质量,  $\rho_a$  为校准时空气质量密度,  $\rho_W$  为待校准砝码的质量密度,  $\rho_R$  为参考砝码的质量密度。

表 1 数据是根据 JJF 1059. 2-2012 示例中提供的变量已知信息  $\delta_{m_{R,C}}$  符合  $N(1.234, 0.020^2)$ , 对其进行随机抽样得到的, 作为针对模型 (9) 进行不确定度评定时, 采用 MCM 和基于接受-拒绝算法的贝叶斯评定方法进行评定所需的输入样本数据。

表 1 依据已知信息抽样所得  $\delta_{m_{R,C}}$  样本数据

Table 1 Sample data of  $\delta_{m_{R,C}}$  obtained by sampling based on known information

数据 1~4	数据 5~8	数据 9~12	数据 13~16	数据 17~20
/mg	/mg	/mg	/mg	/mg
1.233 8	1.222 3	1.211 1	1.248 1	1.245 3
1.260 5	1.235 9	1.230 6	1.231 4	1.245 5
1.226 7	1.224 4	1.210 3	1.242 4	1.216 1
1.254 0	1.240 7	1.254 8	1.210 4	1.245 3

根据示例, 已知质量校准模型中其他各输入量参数信息如表 2 所示。

表 2 质量校准模型输入量信息

Table 2 Information of input quantities in the mass calibration model

输入量	分布类型	参数			
		期望	标准偏差	期望 $(a + b)/2$	半宽度 $(a - b)/2$
$m_{R,C}$	参考砝码的折算质量	正态分布	100 000. 000 mg	0.050 mg	—
$\rho_a$	空气的质量密度	均匀分布	—	—	—
$\rho_W$	待校准砝码的质量密度	均匀分布	—	—	—
$\rho_R$	参考砝码的质量密度	均匀分布	—	—	—

针对式 (9) 所示测量模型, 结合表 1 和 2 信息, 根据流程图 1 应用 Python 软件编程实现基于接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定过程。在数据方差无先验信息的条件下, 对被测量无/有历史信息两种不同情况分别进行接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定。

根据表 1 数据进行初次评定时, 按照被测量  $\delta_m$  无历史信息处理, 得到的先验分布为均匀分布  $U(0.921\,6, 1.549\,2)$ ; 当将 MCM 评定结果作为被测量  $\delta_m$  历史信息

条件下, 其先验分布通过模型传递由蒙特卡洛方法获得符合正态分布  $N(1.234\,4, 0.072\,9^2)$ 。

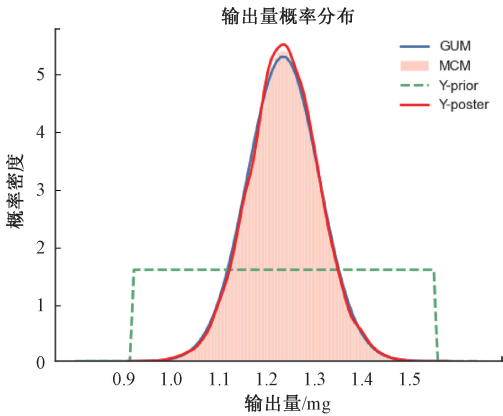
将接受-拒绝算法的贝叶斯测量不确定度评定结果与示例中给出的含高阶项的 GUM 方法评定结果, 以及结合表 1、2 利用 MCM 方法获得的评定结果进行对比。3 种评定方法所获得被测量  $\delta_m$  的概率密度分布如图 2 所示, 对应被测量的最佳估计值、标准不确定度、包含区间等评定结果如表 3 所示。



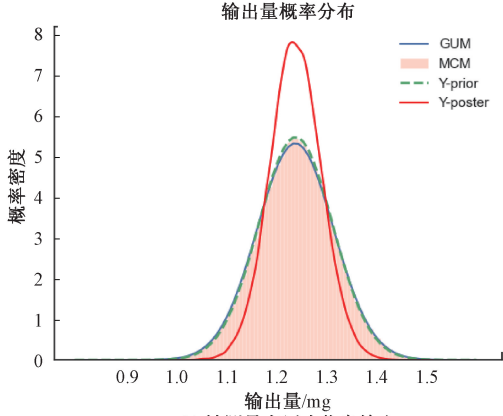
表 3 3 种评定方法结果对比

Table 3 Comparison of the results of the three evaluation methods

质量偏差	评定方法	抽样次数	最佳估计值/mg	标准不确定度/mg	包含区间(95%)/mg
$\delta_m$	GUM	—	1.234 0	0.075 0	[1.087 0,1.381 0]
	MCM	$10^6$	1.234 0	0.075 4	[1.084 7,1.383 3]
	贝叶斯( $\delta_m$ 无信息)	$10^6$	1.234 6	0.073 3	[1.090 8,1.381 8]
	贝叶斯( $\delta_m$ 有信息)	$10^6$	1.234 3	0.050 9	[1.134 4,1.335 2]



(a) 被测量无历史信息输出  
(a) Output under the measurand without historical information



(b) 被测量有历史信息输出  
(b) Output under the measurand with historical information

图 2 3 种方法评定结果对应的概率密度分布图

Fig. 2 Probability density distribution map corresponding to the evaluation results of the three methods

图 2(a) 为被测量无历史信息条件下接受-拒绝算法

的贝叶斯测量不确定度评定 PDF 输出结果与 GUM、MCM 方法输出结果的比较,图 2(b) 为被测量有历史信息条件下接受-拒绝算法的贝叶斯测量不确定度评定 PDF 输出结果与 GUM、MCM 方法输出结果的比较。通过图 2 和表 3 均可看出先验信息对贝叶斯评定输出的显著影响。在被测量无历史信息条件下 3 种方法评定结果基本相同;在被测量有历史信息条件下贝叶斯计算获得不确定相对较小,由于贝叶斯不确定度评定过程中结合了历史先验信息,使其不确定度评定过程更加完善,评定结果更加可靠。同时反映出接受-拒绝算法的贝叶斯测量不确定度评定方法的可行性和有效性。

3.2 三维靶镜 X-Y 反射面间正交偏差角评定

三维靶镜是在研项目微纳米坐标测量机系统中的重要组成部分,其各面间正交性对保障系统测量精度至关重要。为检验三维靶镜加工是否符合测量机精度要求,需要对三维靶镜正交偏差角进行测量及不确定度评定。

本文将采用前期研究<sup>[20]</sup>所获得的实验数据,针对三维靶镜 X-Y 反射面间正交偏差角,基于接受-拒绝算法进行贝叶斯不确定度评定,验证新方法的可行性和有效性,对具体测量方案及测量过程不做赘述。

根据量值特性分析方法,可建立三维靶镜 X-Y 反射面间正交偏差角的测量模型:

$$\theta_{xy} = \theta + \delta_{e1} + \delta_{e2} \tag{10}$$

其中,  $\delta_{e1}$  表示自准直仪测角时的示值误差;  $\delta_{e2}$  表示转台旋转定位造成的测角误差;  $\theta$  为靶镜 X-Y 反射面间正交偏差角的测量值,相同或不同测量条件下  $\theta$  的多次测量数据能够反映测量重复性和测量复现性影响。靶镜 X-Y 面间正交偏差角的测量数据如表 4 所示。

表 4 靶镜 X-Y 面间正交偏差角的测量数据

Table 4 Measurement data of the orthogonal deviation angle between the X-Y planes of the target mirror

组别	测量次数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	偏差角	-2.5"	-3.0"	-3.5"	-2.5"	-3.0"	-3.0"	-3.5"	-3.8"	-2.8"	-3.3"
2	偏差角	-3.5"	-3.0"	-2.6"	-3.0"	-4.0"	-4.0"	-3.5"	-4.0"	-3.3"	-3.7"
3	偏差角	-3.5"	-3.5"	-3.2"	-3.6"	-3.5"	-3.0"	-3.0"	-3.8"	-3.5"	-3.7"
4	偏差角	-4.3"	-3.7"	-3.8"	-4.2"	-3.5"	-3.2"	-3.4"	-3.0"	-3.3"	-2.5"
5	偏差角	-3.7"	-3.5"	-3.0"	-3.0"	-3.3"	-3.4"	-3.2"	-3.5"	-3.7"	-3.0"

测量模型中  $B$  类先验信息如表 5 所示。

表 5 靶镜  $X$ - $Y$  面间正交偏差角模型参数的先验信息

Table 5 The prior information of the model parameters of the orthogonal deviation angle between the  $X$ - $Y$  planes of the target mirror

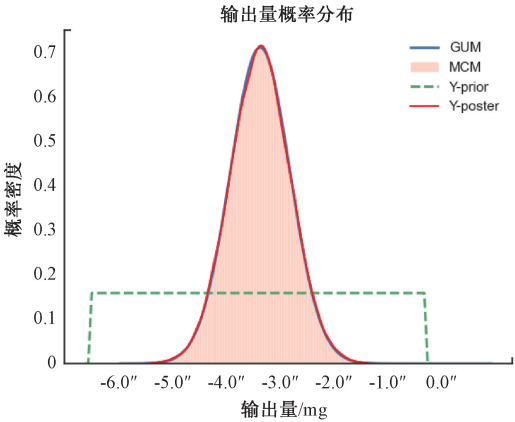
	输入量	分布类型	期望	标准偏差
$\delta_{E1}$	自准直仪示值误差	正态分布	0"	0.25"
$\delta_{E2}$	转台旋转定位引入的测角误差	正态分布	0"	0.5"

针对式 (10) 所示测量模型, 结合表 4 和 5 信息, 根据流程图 1 应用 Python 软件编程实现基于接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定过程。在数据方差无先验信息的条件下, 对被测量无/有历史信息两种不同情况分别进行接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定。

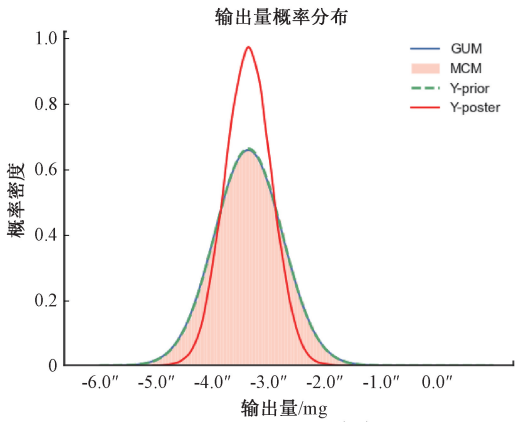
根据表 4 数据进行初次评定时, 按照被测量  $\theta_{xy}$  无历史信息处理, 得到的先验分布为均匀分布  $U(-6.55, -0.25)$ ; 当将 MCM 评定结果作为被测量  $\theta_{xy}$  历史信息条件下, 其先验分布通过模型传递由蒙特卡洛方法获得符合正态分布  $N(-3.359, 0.562^2)$ 。

将接受-拒绝算法的贝叶斯测量不确定度评定结果与 GUM 方法评定结果, 以及结合表 4、5 利用 MCM 方法获得的评定结果进行对比。3 种评定方法所获得被测量  $\theta_{xy}$  的概率密度分布如图 3 所示, 对应被测量的最佳估计值、标准不确定度、包含区间等评定结果如表 6 所示。

图 3(a) 为被测量无历史信息条件下接受-拒绝算法的贝叶斯测量不确定度评定 PDF 输出结果与 GUM、MCM 方法输出结果的比较, 图 3(b) 为被测量有历史信息条件下接受-拒绝算法的贝叶斯测量不确定度评定



(a) 被测量无历史信息输出  
(a) Output under the measurand without historical information



(b) 被测量有历史信息输出  
(b) Output under the measurand with historical information

图 3 3 种方法评定结果对应的概率密度分布图  
Fig. 3 Probability density distribution map corresponding to the evaluation results of the three methods

表 6 3 种不确定度评定方法结果对比

正交偏差角		评定方法	抽样次数	最佳估计值	标准不确定度	包含区间(95%)
$\theta_{xy}$		GUM	—	-3.360"	0.562"	[-4.462", -2.258"]
		MCM	$10^6$	-3.360"	0.560"	[-4.456", -2.264"]
		贝叶斯( $\theta_{xy}$ 无信息)	$10^6$	-3.359"	0.565"	[-4.465", -2.254"]
		贝叶斯( $\theta_{xy}$ 有信息)	$10^6$	-3.359"	0.394"	[-4.136", -2.582"]

PDF 输出结果与 GUM、MCM 方法输出结果的比较。通过图 3 和表 6 均可看出先验信息对贝叶斯评定输出的显著影响, 同时反映出接受-拒绝算法的贝叶斯测量不确定度评定方法的可行性和有效性。

4 结 论

本文为解决贝叶斯不确定度评定中测量模型后验分布获取困难问题, 研究了接受-拒绝算法的贝叶斯不确定

度评定方法, 给出该方法的基本原理、评定流程和关键技术。结合质量校准和三维靶镜正交偏差角测量评定实例, 将基于接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定方法与 GUM、MCM 方法评定结果进行对比。

由图 2、3 所示评定结果概率密度分布以及表 3、6 得出的评定结果可见, 应用 GUM、MCM 及基于接受-拒绝采样的贝叶斯评定方法获得的测量结果最佳估计值基本一致; 在被测量无信息条件下, 由接受-拒绝采样的贝叶斯评定方法所得被测量的标准不确定度与 GUM、MCM 评

定结果基本一致;而在被测量有历史信息条件下,由接受-拒绝采样的贝叶斯评定方法所得被测量的标准不确定度较 GUM、MCM 评定结果偏小,由于融合了历史先验信息,测量结果更加可靠。验证了基于接受-拒绝算法的贝叶斯不确定度评定方法对于线性/非线性测量模型,在无/有历史信息条件下的测量不确定度评定应用中具有可行性和实用性。该方法能够实现面向复杂任务的测量不确定度评定提供方法参考。

## 参考文献

- [1] JJF1059.2-2012 用蒙特卡洛法评定测量不确定度[S]. JJF 1059.2-2012 Evaluation of measurement uncertainty by Monte Carlo method[S].
- [2] GB/T 27418-2017, 测量不确定度评定和表示[S]. GB/T 27418-2017, Measurement uncertainty evaluation and representation[S].
- [3] 王汉斌. CMM 产品检验不确定度评定及误判风险评估[D]. 合肥:合肥工业大学, 2016. WANG H B. Evaluation of uncertainty and misjudgment risk assessment of CMM products [D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2016.
- [4] ABUD T P, AUGUSTO A A, FORTES M Z, et al. State of the art Monte Carlo method applied to powersystem analysis with distributed generation[J]. Energies, 2023, 16(1):394.
- [5] 李红莉,陈晓怀,杨桥,等. CMM 面向任务的多测量策略测量不确定度评定[J]. 电子测量与仪器学报 2015, 29(12):1772-1780. LI H L, CHEN X H, YANG Q, et al. Measurement uncertainty evaluation of CMM task-oriented multi-measurement strategy [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2015, 29 ( 12 ): 1772-1780.
- [6] 江文松,李旋,罗哉,等. 六自由度机械臂参数校准不确定度评定方法[J]. 仪器仪表学报, 2022, 43(7): 26-34. JIANG W S, LI X, LUO Z, et al. Calibration uncertainty evaluation method of six-degree-of-freedom manipulator arm [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2022, 43(7): 26-34.
- [7] 丁义凡,姚贞建,李永生. 压力传感器幅频特性不确定度评定方法研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(10):9-17. DING Y F, YAO ZH J, LI Y SH. Research on uncertainty evaluation method of amplitude-frequency characteristics of pressure sensor[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022, 36(10):9-17.
- [8] 常玉清,康孝云,王福利,等. 基于贝叶斯网络的磨煤

机过程异常工况诊断模型实时更新方法[J]. 仪器仪表学报, 2021, 41(8):52-61.

CHANG Y Q, KANG X Y, WANG F L, et al. Real-time update method of diagnosis model of abnormal working condition of coal mill based on Bayesian network [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 41(8): 52-61.

- [9] DEMEYER S, FISCHER N, ELSTER C. Guidance on Bayesian uncertainty evaluation for a class of GUM measurement models [J]. Metrologia, 2020, 58(1): 014001.
- [10] 姜瑞,陈晓怀,王汉斌,等. 基于贝叶斯信息融合的测量不确定度评定与实时更新[J]. 计量学报, 2017, 38(1):123-126. JIANG R, CHEN X H, WANG H B, et al. Measurement uncertainty evaluation and real-time update based on Bayesian information fusion [J]. Acta Metrology Sinica, 2017, 38(1):123-126.
- [11] BRISKOT T, STÜCKLER F, WITTKOPP F, et al. Prediction uncertainty assessment of chromatography models using Bayesian inference [J]. Journal of Chromatography A, 2019, 1587: 101-110.
- [12] ZHANG K, CHENG G, ZHANG W. Evaluation of roundness error uncertainty by a Bayesian dynamic model [J]. Measurement, 2020, 155: 107565.
- [13] 胡红波,孙桥,杜磊. GUM S1 与基于贝叶斯方法的不确定度评估比较[J]. 计量学报, 2017, 38(4): 517-520. HU H B, SUN Q, DU L. Comparison of GUM S1 and Bayesian method based uncertainty evaluation [J]. Acta Metrology, 2017, 38(4):517-520.
- [14] 程银宝. 现代不确定度理论及应用研究[D]. 合肥:合肥工业大学, 2017. CHENG Y B. Modern uncertainty theory and application research [D]. Hefei: Hefei University of Technology, 2017.
- [15] OHN I, SEO S B, KIM S, et al. Uncertainty decomposition in climate-change impact assessments: A Bayesian perspective[J]. Communications for Statistical Applications and Methods, 2020, 27(1): 109-128.
- [16] 胡红波. MCMC 方法在测量不确定度评估中的应用[J]. 计量技术, 2020(5):89-94. HU H B. Application of MCMC method in measurement uncertainty evaluation [J]. Metrology Technology, 2020(5):89-94.
- [17] ZHANG K, SU K, YAO Y, et al. Dynamic evaluation and analysis of the uncertainty of roundness error measurement by Markov Chain Monte Carlo method[J].

Measurement, 2022, 201: 111771.

- [18] MARSCHALL M, WÜBBELER G, ELSTER C. Rejection sampling for Bayesian uncertainty evaluation using the Monte Carlo techniques of GUM-S1 [J]. Metrologia, 2021, 59(1): 015004.
- [19] WÜBBELER G, MARSCHALL M, ELSTER C. A simple method for Bayesian uncertainty evaluation in linear models[J]. Metrologia, 2020, 57(6): 065010.
- [20] 黄强先, 张祖杨, 郭小倩, 等. 微纳测量机靶镜正交偏差角测量不确定度评定[J]. 电子测量与仪器学报, 2022, 36(10): 1-8.
- HUANG Q X, ZHANG Z Y, GUO X Q, et al. Evaluation of orthogonal deviation angle measurement uncertainty of micro-nano measuring machine[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022, 36(10): 1-8.

## 作者简介



**李红莉**, 1998 年于合肥工业大学获得学士学位, 2005 年于合肥工业大学获得硕士学位, 2015 年于合肥工业大学获得博士学位, 现为合肥工业大学副教授、硕士生导师, 主要研究方向为现代精度理论与应用、不确定度评定理论与应用。

E-mail: hlli@hfut.edu.cn

**Li Hongli** received her B. Sc. degree from Hefei University of Technology in 1998, M. Sc. degree from Hefei University of Technology in 2005, and Ph. D. degree from Hefei University of Technology in 2015, respectively. Now she is an associate professor and master supervisor in Hefei University of Technology. Her main research interests include modern accuracy theory and application, and uncertainty evaluation theory and application.



**陈志文**, 2020 年于河南科技大学获得学士学位, 现为合肥工业大学硕士研究生, 主要研究方向为现代精度理论与应用、不确定性评定理论与应用。

E-mail: chenzw615@163.com

**Chen Zhiwen** received his B. Sc. degree

from Henan University of Science and Technology in 2020. Now he is a M. Sc. candidate in Hefei University of Technology. His main research interests include modern accuracy theory and application, and uncertainty evaluation theory and application.



**张祖杨**, 2020 年于安徽大学获得学士学位, 现为合肥工业大学博士研究生, 主要研究方向为微纳测量技术及系统。

E-mail: zhangzuyang11@163.com

**Zhang Zuyang** received his B. Sc. degree from Anhui University in 2020. Now he is a Ph. D. candidate of Hefei University of Technology. His main research interests include micro/nano measurement technology and systems.



**黄强先**, 1990 年于合肥工业大学获得学士学位, 1993 年于合肥工业大学获得硕士学位, 1998 年于合肥工业大学获得博士学位, 现为合肥工业大学教授、博士生导师, 主要研究方向为微纳米三维测量技术、仪器精度理论等。

E-mail: huangqx@hfut.edu.cn

**Huang Qiangxian** received his B. Sc. degree from Hefei University of Technology in 1990, M. Sc. degree and Ph. D. degree from Hefei University of Technology in 1993 and 1998, respectively. Now he is a professor and doctoral supervisor in Hefei University of Technology. His main research interests include micro/nano three-dimensional measurement technology and instrument accuracy theory.



**程荣俊** (通信作者), 2016 年毕业于西安交通大学机械工程学院, 获博士学位。目前任职于合肥工业大学, 主要研究方向为微纳测量技术、微传感器设计与制造。

E-mail: chengrj@hfut.edu.cn

**Cheng Rongjun** (Corresponding author) received the Ph. D. degree from the School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University in 2016. He is now working at Hefei University of Technology. His main research interests include micro/nano measurement technology, microsensor design and manufacturing.