

DOI: 10.13382/j.jemi.2017.06.004

基于四阶非线性偏微分方程的图像去噪算法^{*}

吴登辉^{1,2} 周先春^{1,2} 陈 铭¹

(1. 南京信息工程大学 电子与信息工程学院 南京 210044;
2. 南京信息工程大学 江苏省大气环境与装备技术协同创新中心 南京 210044)

摘 要:为了更好的实现图像模糊消除和有效地去除斑点噪声,提出了一种新的基于偏微分方程的图像去噪方法,它是基于非线性四阶扩散模型。首先提出了该非线性偏微分方程的方案,然后对微分模型进行数学处理,研究它的适定性,最后证明了此模型在一定条件下是适定的,并且存在了弱解,所得到的弱解近似于基于有限差分数值离散格式。实验结果表明,新模型在图像去噪和保边缘等细节信息方面都达到较好的效果,峰值信噪比有了大幅提高,去噪性能较经典模型更具优越性。

关键词: 图像去噪;偏微分方程;非线性扩散;弱解;数值逼近法

中图分类号: TP391.41;TN911.7 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4050

Image denoising algorithm based on nonlinear fourth-order PDE

Wu Denghui^{1,2} Zhou Xianchun^{1,2} Chen Ming¹

(1. College of Electronic and Information Engineering, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China; 2. Jiangsu Key Laboratory of Meteorological Observation and Information Processing, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract:To provide a better image deblurring and remove successfully the speckle noise, a novel PDE-based image denoising approach is proposed in this paper. It is based on a nonlinear fourth-order diffusion model. The nonlinear PDE scheme is described first. Then, a mathematical treatment is provided for this differential model, its well-posedness being investigated. It is proved that the model is well-posed in some certain conditions and admits a weak solution. The weak solution of the obtained PDE is approximated by developing an explicit finite-difference based numerical discretization scheme. The experimental results show that the new model proposed in this paper can achieve good results in image denoising and preserving edges and other details. Compared with the classical model, the peak signal to noise ratio is greatly improved and the denoising performance is more better.

Keywords: image denoising; partial differential equation; nonlinear diffusion; weak solution; numerical approximation scheme

1 引 言

基于偏微分方程(partial differential equation, PDE)图像处理方法因其所具有的局部自适应特性、形式上的规范性和模型建立的灵活性而成为一新型的图像处理数学工具,被广泛地应用在图像去噪^[14]等多个领域。当

前,基于研究的热点主要集中于二阶 PDE^[5-7]、四阶 PDE^[8-10]和分数阶 PDE^[11-12]。此外,基于块匹配的图像去噪算法,文献[13]首次提出了非局部平均(non-local means, NLM)滤波器和非局部概念。

针对各向异性扩散模型(PM 模型)出现的阶梯效应,You 和 Kaveh 引入了四阶偏微分方程(YK 模型),此模型用拉普拉斯来度量边缘区域,使得从视觉上看,无

收稿日期:2017-03 Received Date: 2017-03
^{*} 基金项目:国家自然科学基金(61601229,11202106)、江苏省"信息与通信工程"优势学科建设项目、江苏省青蓝工程和江苏省高校自然科学研究项目(16KJB510022)资助

“阶梯效应”现象发生,但该模型保护边缘的能力较差,同时会产生斑点噪声。文献[14]用梯度模代替拉普拉斯绝对值作为边缘检测算子提出了一种改进的四阶 PDE 模型,该模型有较快的收敛速度,改善了去噪效果,但模糊了图像边缘。文献[15]在此基础上,提出了各向异性扩散四阶去噪算法,在法向和切向进行不同程度的扩散,更好的保留了图像的细节,但该模型存在梯度伪影。本文在现有算法上,提出了一种新的基于四阶非线性偏微分方程的图像去噪算法,在去噪和保边缘之间实现了很好的平衡。

2 非线性四阶偏微分方程去噪模型

考虑一个基于非线性扩散方程的图像恢复模型,其偏微分方程及几个边界条件如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla^2(\varphi^u(\|\nabla u\|)\Delta u) + \lambda(u - u_0) = 0 \\ u(0, a, b) = u_0(a, b), \forall (a, b) \in \Omega \\ u(t, a, b) = 0, \forall (a, b) \in \partial\Omega \\ \Delta u(t, a, b) = 0, \forall (a, b) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\lambda \in (0, 1)$, $\Omega \in R^2$, $\partial\Omega$ 表示其边界, $\Delta = \nabla^2$ 是拉普拉斯算子, u_0 表示被高斯噪声破坏的原始图像。为较好的恢复原图像,选择恰当的偏微分模型的扩散函数, $\varphi^u: [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, 有如下形式:

$$\varphi^u(c) = \mu \sqrt{\frac{\omega(u)}{\alpha \ln(c^2 + \omega(u))^3 + \beta}} \quad (2)$$

其中,

$$\omega(u) = 1 + \text{sign} \frac{1}{\nu + \zeta \varepsilon(\|\nabla u\|)} \quad (3)$$

$\varepsilon(\cdot)$ 为平均数算子, $\nu, \zeta \in (0, 1)$, 在这里, sign 为符号函数, 有:

$$\text{sign} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (4)$$

综上所述,恢复图像是通过求解式(1)的偏微分方程,研究代表噪声图像的非线性偏微分方程解的存在和唯一性。

显然,式(1)~(3)是病态的,下面对该扩散模型的一个解的适定性作数学处理,去证明该差分模型在一些特定的条件下是适定的。

3 偏微分方程模型的数学处理

由于式(1)提出的非线性偏微分方程去噪方案是病态的,故对式(1)可以定义一个广义的解 u_n 。考虑序列

$\{u_n\}$ 迭代定义为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} + \Delta(\varphi^u(\|\nabla u_{n-1}\|)\Delta u_n) + \lambda(u - u_0) = 0 \\ u_n(0, a, b) = u_0(a, b), \forall (a, b) \in \Omega \\ u_n(t, a, b) = \Delta u_n(t, a, b), \forall (a, b) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (5)$$

该模型的能量泛函如下:

$$E(u) = \arg\min_u \left\{ \frac{1}{2} \|u_0 - u\|_2^2 + \eta \sqrt{u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2} \right\} \quad (6)$$

式中: $u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}$ 分别代图像 u 不同方向的二阶偏导数。

4 模型的求解

这里先来介绍 4 个辅助变量 d_1, d_2, d_3, d_4 , 假设:

$$\begin{cases} u_{xx} = d_1 \\ u_{xy} = d_2 \\ u_{yx} = d_3 \\ u_{yy} = d_4 \end{cases} \quad (7)$$

原始问题可转化为:

$$\begin{cases} E(u) = \arg\min_u \left\{ \frac{1}{2} \|u_0 - u\|_2^2 + \eta \sqrt{u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yx}^2 + u_{yy}^2} \right\} \\ u_{xx} = d_1, u_{xy} = d_2, u_{yx} = d_3, u_{yy} = d_4 \end{cases} \quad (8)$$

紧接着将其转化为非绑定问题,通过使用增广拉格朗日方法如下:

$$\begin{aligned} E(u) = \arg\min_u \left\{ \frac{1}{2} \|u_0 - u\|_2^2 + \right. \\ \left. \eta \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2} + \right. \\ \left. \frac{\gamma}{2} \|d_1 - u_{xx} - b_1\|_2^2 + \frac{\gamma}{2} \|d_2 - u_{xy} - b_2\|_2^2 + \right. \\ \left. \frac{\gamma}{2} \|d_3 - u_{yx} - b_3\|_2^2 + \frac{\gamma}{2} \|d_4 - u_{yy} - b_4\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

式中: b_1, b_2, b_3, b_4 是 Bergman 变量, γ 是大于 0 的惩罚系数,使用交替最小二乘来解决上述问题,即式(8)被转化成关于 u 和 d_1, d_2, d_3, d_4 的子问题。

关于 u 的子问题如下:

$$\begin{aligned} E(u) = \arg\min_u \left\{ \frac{1}{2} \|u_0 - u\|_2^2 + \right. \\ \left. \frac{\gamma}{2} \|d_1 - u_{xx} - b_1\|_2^2 + \frac{\gamma}{2} \|d_2 - u_{xy} - b_2\|_2^2 + \right. \\ \left. \frac{\gamma}{2} \|d_3 - u_{yx} - b_3\|_2^2 + \frac{\gamma}{2} \|d_4 - u_{yy} - b_4\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

关于 d_1, d_2, d_3, d_4 的子问题如下:

$$\begin{cases} d_1^{k+1} = \max\left\{s^k - \frac{\eta}{\gamma}\omega, 0\right\} \cdot \frac{u_{xx}^{k+1} + b_1^k}{s_k} \\ d_2^{k+1} = \max\left\{s^k - \frac{\eta}{\gamma}\omega, 0\right\} \cdot \frac{u_{xy}^{k+1} + b_2^k}{s_k} \\ d_3^{k+1} = \max\left\{s^k - \frac{\eta}{\gamma}\omega, 0\right\} \cdot \frac{u_{yx}^{k+1} + b_3^k}{s_k} \\ d_4^{k+1} = \max\left\{s^k - \frac{\eta}{\gamma}\omega, 0\right\} \cdot \frac{u_{yy}^{k+1} + b_4^k}{s_k} \end{cases} \quad (11)$$

其中,

$$s^k = \sqrt{(u_{xx}^{k+1} + b_1^k)^2 + (u_{xy}^{k+1} + b_2^k)^2 + (u_{yx}^{k+1} + b_3^k)^2 + (u_{yy}^{k+1} + b_4^k)^2} \quad (12)$$

关于 b_1, b_2, b_3, b_4 的子问题如下:

$$\begin{cases} b_1^{k+1} = b_1^k + u_{xx}^{k+1} - d_1^{k+1} \\ b_2^{k+1} = b_2^k + u_{xy}^{k+1} - d_2^{k+1} \\ b_3^{k+1} = b_3^k + u_{yx}^{k+1} - d_3^{k+1} \\ b_4^{k+1} = b_4^k + u_{yy}^{k+1} - d_4^{k+1} \end{cases} \quad (13)$$

5 实验结果及分析

为验证模型算法的合理性与有效性,对图像“南京信息工程大学”加入高斯随机噪声,本文用中心差分数值算法进行仿真,仿真软件 MATLAB,比较它们的均方差 (MSE) 和峰值信噪比 (PSNR),评价算法的有效性。

$$MSE = \frac{1}{W \times H} \sum_{i=1}^W \sum_{j=1}^H [I(i,j) - I_0(i,j)]^2 \quad (14)$$

$$PSNR = 10\log_{10}\left(\frac{255^2}{MSE}\right) \quad (15)$$

图像的分辨率为 $W \times H$, I 和 I_0 表示去噪后的图像和初始图像, MSE 越小越好, PSNR 越大越好。

首先对图 1 (a) 的加噪图像分别使用 PM 模型、TV 模



(c) TV模型 (d) 本文模型
(c) TVmodel (d) Proposed model

图 1 各模型平滑后的图像

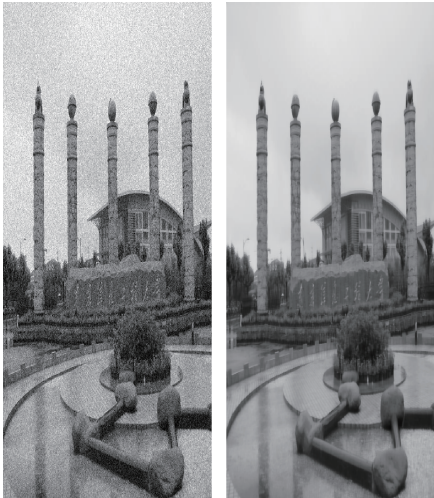
Fig. 1 The smoothed image for each model

型和本文模型进行平滑。其中,时间步长 Δt 都为 2,迭代次数都为 7,各模型阈值都取 10。平滑结果如图 1 中 (b) ~ (d) 所示,评价指标如表 1 所示,图 2 所示为图像“南京信息工程大学”局部放大效果。为了更好的显示滤波前后图像边缘纹理等细节信息情况,采用算子 (Canny, Prewitt) 对各种模型滤波结果进行边缘检测,结果如图 3 所示。图 4 所示为各模型在不同方差噪声下的峰值信噪比和均方差。

表 1 各种去噪模型的 MSE 和 PSNR 比较

Table 1 Comparison of MSE and PSNR for various denoising models

	加噪图像	PM 模型	TV 模型	本文模型
MSE	385.916 1	172.433 0	96.946 1	22.590 7
PSNR	22.265 9	25.764 6	28.265 5	34.591 5



(a) 加噪图像 (b) PM模型
(a) Noise image (b) PMmodel



(a) 加噪图像 (b) PM模型
(a) Noise image (b) PMmodel



图 2 各模型平滑后的局部放大图像

Fig. 2 The smoothed local enlargement image for each model

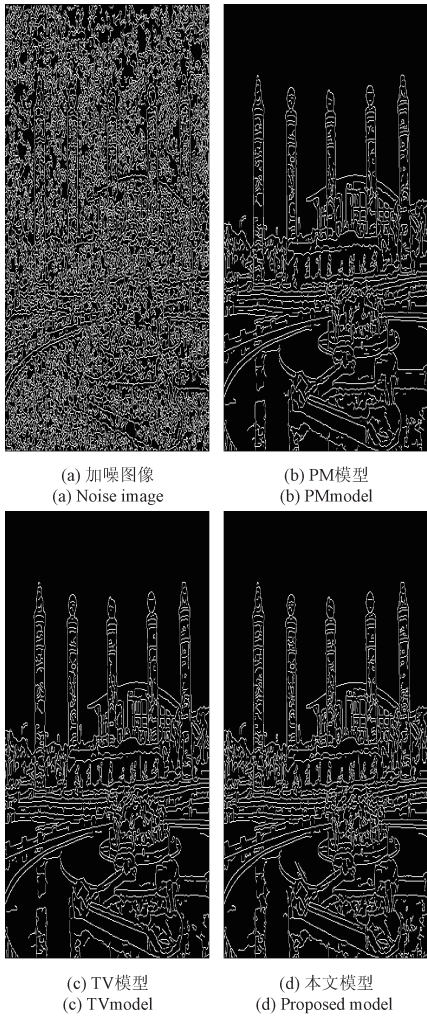


图 3 各模型平滑后的边缘提取图像

Fig. 3 The smoothed edge extraction image for each model

从图 1(b)、(c) 的整体可视效果和图 2(b)、(c) 的局部放大可视效果来看,PM 模型去噪后的图像噪声基本没有被去除,且图像中产生了“块状”效应;TV 模型去噪后的图像中出现了一些孔洞,这是由于该模型不符合形态学原则,破坏了图像,但该模型有一定的去噪效果,图像的边缘保持较好,从图 3(c) 可以更清楚地看到图像中的一些边缘纹理等细节信息被保留了下来。由图 1(d)、图 2(d) 可以看到本文提出的模型可视性最好,更好地考虑图像的局部特征,兼顾了去噪与边缘纹理等细节信息的保护。从表 1 的评价指标可以看出,本文提出的模型效果最好,在峰值信噪比方面比 PM 模型提高了大约 9 dB,比 TV 模型提高了大约 6 dB。

用不同的噪声强度反映各模型对噪声的抑制效果和图像边缘纹理等细节信息的状况。现对图像添加不同方差的噪声。实验结果如图 4 所示。

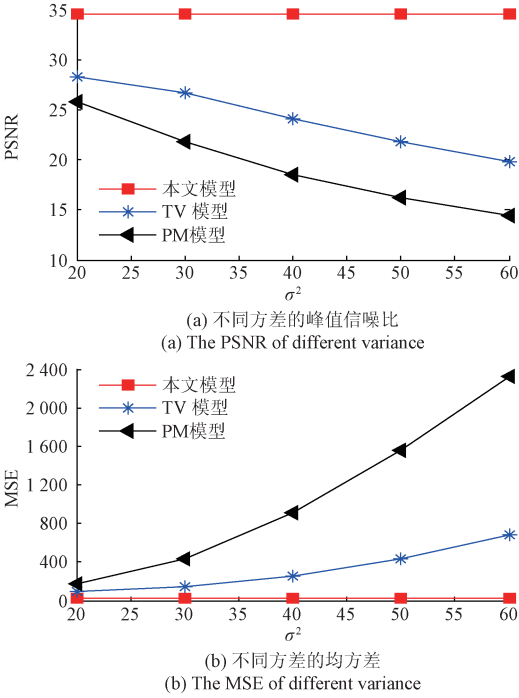


图 4 各模型不同方差的 PSNR 和 MSE 仿真图

Fig. 4 The PSNR and MSE simulation of different variance for each model

通过图 4 可以看出新模型在所有模型中有最高的峰值信噪比和最低的均方差,再次证实了新模型的去噪性能优越。

6 结 论

本文提出一种新的基于四阶非线性偏微分方程去噪算法。首先提出了该非线性偏微分方程的方案,然后对微分模型进行数学处理,研究它的适定性。最后证明了

此模型在一定条件下是适定的,并且存在了弱解。所得到的弱解的近似于基于有限差分数值离散格式。实验结果表明,新模型有效抑制了阶梯效应和孤立点现象,很好保留了图像细节纹理特征,去噪效果明显,峰值信噪比与PM模型相比提高了约9 dB。

参考文献

- [1] 荣霞,薛伟,朱继超. 一种新的小波阈值函数在图像去噪中的应用[J]. 电子测量技术,2016,39(5):84-88.
RONG X, XUE W, ZHU J CH. New wavelet thresholding function in image denoising[J]. Electronic Measurement Technology,2016, 39(5): 84-88.
- [2] 郭海涛,徐雷. 一种抑制声呐图像散斑噪声的形态学滤波器[J]. 仪器仪表学报,2015,36(3):654-660.
GUO H T, XU L. A morphological filter for despeckling of a sonar image [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2015, 36(3):654-660.
- [3] 孙萍萍. 基于小波包理论的激波信号去噪研究[J]. 国外电子测量技术,2016,35(7):38-42.
SUN P P. Denoising of shack signal based on wavelet packet theory [J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2016, 35(7):38-42.
- [4] 曹风云,赵凯,王筱薇倩,等. 自适应水下彩色图像增强算法[J]. 电子测量与仪器学报,2016,30(5):772-778.
CAO F Y, ZHAO K, WANG X W Q, et al. An adaptive under water image enhancement algorithm [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2016, 30(5):772-778.
- [5] 彭扬,何传江,任泽民,等. 结合 Tsallis 熵的各向异性扩散模型[J]. 计算机工程与设计,2014, 35 (1) : 218-222.
PENG Y, HE CH J, REN Z M, et al. Local Tsallis entropy combined anisotropic diffusion model [J]. Computer Engineering and Design, 2014, 35 (1) :218-222.
- [6] SURYA PRASATH V B, VOROTNIKOV D. Weighted and well-balanced anisotropic diffusion scheme for image denoising and restoration[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2014, 17(6):33-46.
- [7] TOHIDI E, ZAK M K. A new matrix approach for solving second-order linear matrix partial differential equations [J]. Mediterranean Journal of Mathematics, 2016, 13(3):1353-1376.
- [8] JIDESH P, GEORGE S. Shock coupled fourth-order diffusion for image enhancement [J]. Computers & Electrical Engineering, 2012, 38(5):1262-1277.
- [9] LIU X Y, LAI C H, PERICLEOUS K A. A fourth-order partial differential equation denoising model with an adaptive relaxation method [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2015, 92(3):608-622.
- [10] HU B, QIU SH F, YANG ZH H, et al. The image denoising by fourth-order partial differential equations[J]. Journal of Jiangxi Normal University, 2016,40(6): 603-607.
- [11] ZHANG W, LI J, YANG Y. Spatial fractional telegraph equation for image structure preserving denoising [J]. Signal Processing, 2015, 107:368-377.
- [12] YIN X, ZHOU S. Image structure-preserving denoising based on difference curvature driven fractional nonlinear diffusion [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(4):1-16.
- [13] ZHANG K B, GAO X B, LI X L. Single image super-resolution with non-local means and steering kernel regression [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21 (11): 4544-4555.
- [14] HAJIABOLI M R. A Self-governing fourth-order nonlinear diffusion filter for image noise removal [J]. IPSJ Transactions on Computer Vision & Applications, 2010 (2):94-103.
- [15] HAJIABOLI M R. An anisotropic fourth-order diffusion filter for image noise removal[J]. International Journal of Computer Vision, 2011, 92(2):177-191.

作者简介



吴登辉,1991年出生,现为南京信息工程大学硕士研究生,主要研究方向为数字图像处理。

Email:1102319071@qq.com

Wu Denghui was born in 1991. He is currently a M. Sc. candidate in Nanjing University of Information Science and Technology. His main research interest is digital image processing.



周先春(通讯作者),2011年于南京信息工程大学获得博士学位,现为南京信息工程大学电子信息工程系副教授,硕士生导师,主要研究方向为信号与信息处理。

E-mail:001398@nuist.edu.cn

Zhou Xianchun (Corresponding author) received Ph. D. from Nanjing University of Information Science and Technology in 2011. Now he is a professor and M. Sc. supervisor in Department of Electronic Information Engineering, Nanjing University of Information Science and Technology. His main research interests are signal and information processing.