

DOI: 10.13382/j.jemi.B2205399

# 基于改进 Richardson 的大规模 MIMO 信号检测算法\*

代涛<sup>1</sup> 李正权<sup>1,2,3</sup> 王舟明<sup>1</sup> 邢松<sup>4</sup>

(1. 江南大学物联网工程学院 无锡 214122; 2. 江苏省未来网络创新研究院 南京 211111; 3. 江苏理工学院常州市 5G+ 工业互联网融合应用重点实验室 常州 213001; 4. 加利福尼亚州立大学信息系统系 洛杉矶 90032)

**摘要:**在大规模多输入多输出 (multiple-input multiple-output, MIMO) 系统信号检测中, 最小均方误差 (minimum mean square error, MMSE) 算法可以得到近似最优检测性能, 然而该算法需要高维矩阵求逆, 其复杂度很高, 无法保证信号的实时检测。因此提出一种改进 Richardson 信号检测方法, 利用最速下降法和整体修正法改进 Richardson 算法性能, 最速下降法可以提供更有效地搜索路径, 得到不同近似解, 并且为了提高求解精度, 利用整体修正法对不同近似解进行修正, 使算法收敛速度更快, 同时将算法复杂度数量级由  $\mathcal{O}(K^3)$  降低到  $\mathcal{O}(K^2)$ 。仿真结果表明, 该算法只需 3 次迭代就可接近 MMSE, 在降低复杂度的同时提高了误码率性能。

**关键词:** Richardson; 大规模 MIMO; 最速下降; 矩阵求逆

**中图分类号:** TN929 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4010

## Massive MIMO signal detection based on improved Richardson method

Dai Tao<sup>1</sup> Li Zhengquan<sup>1,2,3</sup> Wang Zhouming<sup>1</sup> Xing Song<sup>4</sup>

(1. School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China; 2. Jiangsu Future Networks Innovation Institute, Nanjing 211111, China; 3. Changzhou Key Laboratory of 5G + Industrial Internet Fusion Application, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001, China; 4. Information Systems Department, California State University, Los Angeles, CA 90032, USA)

**Abstract:** In the detection of massive multiple-input multiple-output systems, the minimum mean square error algorithm can obtain approximately optimal detection performance, its complexity is very high and cannot guarantee the real-time detection of the signal. An improved Richardson signal detection method is proposed, which uses the steepest descent and the whole-correction method to improve the performance of the Richardson algorithm. The steepest descent can provide more efficient search paths and obtain different approximate solutions, in order to improve the accuracy of the algorithm, the whole-correction method is used to modify the different approximate solutions, so that the convergence speed is faster, and the complexity of the algorithm is reduced from the order of magnitude  $\mathcal{O}(K^3)$  to  $\mathcal{O}(K^2)$ . Simulation results show that the proposed algorithm can approach MMSE with only 3 iterations, which reduces the complexity and improves the BER performance.

**Keywords:** Richardson iteration; massive MIMO; steepest descent; matrix inversion

## 0 引言

大规模多输入多输出 (MIMO) 技术具有数据传输速

率高、信道容量大<sup>[1]</sup>的显著优势, 能够扩大信号传输范围, 提高通信质量, 因此是未来无线通信领域的研究热点。在功率受限情况下, 信号传输实时性和精确度无法满足数据业务应用需求, 故大规模 MIMO 系统中基站端需引入快速

收稿日期: 2022-04-18 Received Date: 2022-04-18

\* 基金项目: 未来网络科研基金项目 (FNSRFP-2021-YB-11)、111 引智计划基金资助项目 (B23008)、常州市 5G+ 工业互联网融合应用重点实验室项目 (CM20223015) 资助

准确的信号检测技术以提升系统性能,但基站端拥有海量天线数,会使信号检测运算复杂度大幅增加,因而亟待设计一种高性能且复杂度低的信号检测算法。

一般来说,信号检测算法可以分为非线性检测和线性检测两种类型。常见的非线性检测算法包括最大似然(maximum likelihood, ML)检测算法<sup>[2]</sup>,球形解码算法(spherical decoding algorithms, SDA)<sup>[3]</sup>、消息传递(message passing, MP)<sup>[4]</sup>、期望传播(expectation propagation, EP)<sup>[5]</sup>等,上述算法可以实现接近最佳的检测性能,但其复杂度随着天线数量增加而大幅增加,难以应用于大规模 MIMO 系统。线性检测算法可以得到近似最优的检测性能,与此同时信号处理方式更为简便,常用的有迫零(forced zero, ZF)检测算法<sup>[6]</sup>,不过 ZF 算法未考虑噪声影响,尤其在信噪比较低时,误码率性能差,为此提出了最小均方误差(minimum mean square error, MMSE)算法<sup>[7]</sup>,但 ZF 和 MMSE 都带来了高维矩阵求逆的问题。

对于高维矩阵求逆问题,替代矩阵求逆典型算法可以分为 3 类:1) 基于级数展开的典型算法。文献[8]提出了 Neumann 级数近似算法,该算法将矩阵求逆转换为一系列的矩阵向量乘法。然而,复杂度的降低并不明显,当 Neumann 级数阶数大于 2 时,算法的复杂度仍将高达  $\mathcal{O}(K^3)$ 。随着用户数的增加,性能明显下降。2) 基于矩阵近似和分解的算法。文献[9]提出了 3 对角矩阵求逆近似(tridiagonal matrix inversion approximation, TMA)检测器通过近似 Gram 矩阵(即  $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$ )求逆来降低复杂度;文献[10]通过切比雪夫分解(Cholesky decomposition)来降低矩阵求逆复杂度。然而,这些方法虽然达到了可接受的检测性能,但它们实现复杂度依然很高,对于保证信号检测的实时性有一定难度。3) 使用迭代方法,将 MMSE 矩阵的矩阵求逆问题通过迭代转化为求解线性方程组问题。如高斯赛德尔(Gauss-Seidel, GS)<sup>[11]</sup>、连续超松弛(successive over relaxation, SOR)<sup>[12]</sup>、加速超松弛(accelerated overrelaxation, AOR)迭代方法<sup>[13]</sup>等。但这些方法的计算步骤之间有很高的关联性,只能按顺序进行计算。因此,研究者提出了一些检测方法来提高计算的并行性。Jacobi 算法<sup>[14]</sup>是一种简单的迭代算法,具有很高的并行性。文献[15]的最速下降雅可比(steepest descent Jacobi, SDJC)也具有可并行的迭代。但仍然需要大量的计算。文献[16]提出改进的 Jacobi 迭代,通过使用整体修正法来加速算法的收敛,提出了一个加快收敛速度的新思路。Richardson 方法<sup>[17]</sup>相对于其他迭代算法可以消耗较低的复杂度并保持可接受的性能。不过随着用户数量的逐渐增加,该算法收敛速度变得缓慢。最速下降法(steepest descent, SD)<sup>[18]</sup>可以为算法提供有效搜索方向,使其更快地收敛。整体修正法(whole-

correction)<sup>[16]</sup>是将得到的不同近似解来进行修正,使最终结果更加接近精确解。

在大规模 MIMO 中,天线的数量一般要比用户的数量大很多,每个用户之间的信道近似正交,会出现信道硬化现象<sup>[19]</sup>。针对 MMSE 滤波矩阵是对称正定的这一特殊性质,将 MMSE 检测算法转换为线性方程组问题,本文尝试结合最速下降法和整体修正法来加速 Richardson 算法的收敛性,来求解线性方程组,其中最速下降法为 Richardson 提供一个有效的搜索方向,当迭代近似解接近精确解时,最速下降法将不再提供有效的搜索方向,此时采用整体修正法来进行有效搜索来提高收敛率,改善系统误码率性能。并且通过理论证明了该算法的有效性。仿真结果证明,对于 Richardson 算法的性能随着天线数量增加而明显下降的问题,所提出的改进算法在适应不同数量的用户方面更有效率,同时算法在误码率方面优于 Richardson。该算法在误码率方面可以接近 MMSE,同时又避免复杂度过高的问题。改进 Richardson 算法仅需要迭代 2 次就比传统算法迭代 6 次时误码率还低。

## 1 系统模型

在大规模 MIMO 系统的上行链路中,假设基站接收端的天线数量为  $N$ ,用户发送端天线数量为  $K$ ,一般来说  $N \gg K$ ,大规模 MIMO 系统模型如图 1 所示。

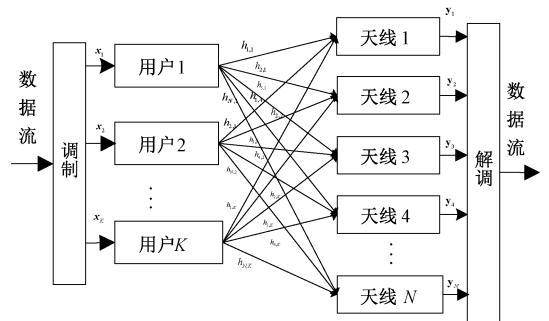


图 1 大规模 MIMO 系统模型

Fig. 1 Massive MIMO system model

在本文中,假设单个用户使用单个天线。 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_K]^T \in \mathbb{C}^{K \times 1}$  代表所有用户同时发送的  $K \times 1$  符号。一般来说,单用户功率设置为  $\mathbb{E} |x_i|^2 = 1, x_i \in \mathbb{Q}$ , 其中  $\mathbb{Q}$  代表调制符号集,  $x_i$  表示第  $i$  个用户发送信息。假设信号经过瑞利衰落信道,信道增益矩阵<sup>[20]</sup>由  $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_K] \in \mathbb{C}^{N \times K}$  表示,信道增益向量为  $\mathbf{h}_j = [h_{1,j}, h_{2,j}, \dots, h_{N,j}]^T \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ ,  $h_{i,j}$  表示第  $i$  个接收天线与第  $j$  个发送天线之间的信道衰落系数,同时  $h_{i,j}$  满足独立同分布且复高斯分布,均值为 0,方差为 1。在接收端的  $N \times 1$  维度信号  $\mathbf{y}$  可以表示为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \dots, n_N] \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  是一个  $N \times 1$  维的加性高斯噪声 (additive white Gaussian noise, AWGN),  $n_i$  满足均值为 0, 方差  $\sigma^2$ 。

本文中的 SNR 是指每个接收天线的平均信噪比 (signal-to-noise ratio, SNR)

$$\text{SNR} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbf{x}}[\|\mathbf{H}\mathbf{x}\|^2]}{\mathbb{E}_{\mathbf{n}}[\|\mathbf{n}\|^2]} \quad (2)$$

其中,  $\|\cdot\|$  表示向量范数。

## 2 算法设计

### 2.1 MMSE 信号检测

该算法估计发射信号矢量  $\mathbf{x}$ , 接收信号矢量  $\mathbf{y}$ , 在对发射信号矢量  $\hat{\mathbf{x}}$  的估计后, 可以通过以下方式实现对来自  $K$  个不同用户  $\hat{\mathbf{x}}$  的估计:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{(\mathbf{H}^H \mathbf{H} + \sigma^2 \mathbf{I}_K)^{-1}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\mathbf{H}^H \mathbf{y}}_{\mathbf{b}} \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{I}_K$  是单位矩阵,  $\mathbf{H}^H$  是  $\mathbf{H}$  的共轭转置,  $(\cdot)^{-1}$  表示矩阵的逆。  $\mathbf{A}$  表示 MMSE 滤波矩阵,  $\mathbf{b}$  表示  $\mathbf{y}$  的匹配滤波输出。

需要注意的是直接计算矩阵逆  $\mathbf{A}^{-1}$  需要的复杂度为  $\mathcal{O}(K^3)$  [21]。

### 2.2 Richardson 算法

Richardson 算法 [17] 是一种解决线性方程的迭代算法, 其形式为  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , 该算法的迭代方程可表示为:

$$\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t-1)}) \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{x}^{(0)}$  为初始值,  $\omega$  代表松弛参数, 决定 Richardson 算法收敛快慢。文献 [22] 研究表明最佳松弛参数为:

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}} \quad (5)$$

根据随机矩阵理论, 如果  $N$  和  $K$  增长到无穷大, 矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值范围将趋于稳定, 并且近似  $\lambda_{\min}$  和  $\lambda_{\max}$  为:

$$\lambda_{\min} \rightarrow N(1 - \sqrt{K/N})^2 \quad (6)$$

$$\lambda_{\max} \rightarrow N(1 + \sqrt{K/N})^2$$

所以最优的松弛参数可以表达为:

$$\omega_{\text{opt}} = (2/(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})) = \frac{1}{N + K} \quad (7)$$

式(4)可写为:

$$\mathbf{x}^{(t)} = \mathbf{x}^{(t-1)} + \frac{(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t-1)})}{N + K} \quad t = 0, 1, \dots, T \quad (8)$$

迭代算法的初始值不影响算法的收敛性, 但初始值选取对迭代算法的收敛速度和检测精度有一定影响。一般来说, 初始值用零向量时, 算法收敛会很慢。为了拥有

更快收敛速度, 本文算法收敛初值选取为:

$$\mathbf{x}^{(0)} = (2/(\lambda_{\min} + \lambda_{\max})) \times \mathbf{b} = \omega_{\text{opt}} \mathbf{b} \quad (9)$$

### 2.3 改进 Richardson 算法

在本节中, 通过 Richardson 算法, 提出一种改进 Richardson 的 MIMO 信号检测算法。总体来说, 提出的算法分为两个阶段。在第 1 阶段, 最速下降法应用于 Richardson 第某次迭代的过程中, 加快算法收敛速度; 在第 2 阶段, 将最速下降迭代结果代入 Richardson 迭代, 之后利用整体修正法进一步提高算法的收敛率。

1) 在第  $t$  次迭代的前半段, 利用最速下降法迭代结果为:

$$\mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})} = \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)} \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{r}^{(t)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)}$  是残差向量,  $\mu^{(t)}$  代表可步长。  $\mu^{(t)}$  可由  $\mathbf{r}^{(t)}$  决定:

$$\mu^{(t)} = \frac{(\mathbf{r}^{(t)})^H \mathbf{r}^{(t)}}{(\mathbf{A}\mathbf{r}^{(t)})^H \mathbf{r}^{(t)}} \quad (11)$$

2) 在第  $t$  次迭代的后半段, 进行 Richardson 迭代, 其结果为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(t+1)} &= \mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})}) = \\ &(\mathbf{I} - \omega\mathbf{A})\mathbf{x}^{(t+\frac{1}{2})} + \omega\mathbf{b} \end{aligned} \quad (12)$$

将式(10)代入(12)后, 可以得到:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(t+1)} &= \mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)} + \omega(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(t)} - \mu^{(t)} \mathbf{p}^{(t)}) = \\ &\mathbf{x}^{(t)} + \mu^{(t)} \mathbf{r}^{(t)} + \omega(\mathbf{r}^{(t)} - \mu^{(t)} \mathbf{p}^{(t)}) \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 式(13)的  $\mathbf{p}^{(t)} = \mathbf{A}\mathbf{r}^{(t)}$ , 在每次迭代中, 最速下降法提高了 Richardson 迭代的收敛率。然而, 当迭代估计接近于解时, 最速下降法不再提供有效的迭代方向。因此, 为了继续提高该算法迭代的收敛性, 采用了整体修正法 [16]。

该方法可以从  $\mathbf{x}$  的多个近似解中得到更精确的解。因此, 更新后的精确解  $\mathbf{x}$  要满足  $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 < \min_{1 \leq i \leq m} \|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_i\|_2$ 。然后令残差向量  $\mathbf{r}_{i_0} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_{i_0}$ , 其中  $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\mathbf{x}_{i_0}$  表示某个已知的近似解。由于本文采取的近似解的个数为 2, 因此将以  $m=2, i_0=2$  为例, 可以求得精确解的残差向量可以表示为:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}_2 + \sum_{i \neq 2} a_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_2) = \mathbf{r}_2 + a_1 \mathbf{Q}_2 \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{Q}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , 式(14)中优化问题的最小范数解表示为:

$$a_1 = -(\mathbf{Q}_2)^+ \mathbf{r}_2 \quad (15)$$

$(\cdot)^+$  表示矩阵的广义逆, 通过式(15), 可以得到  $a_1$  的值。通过文献 [16] 可知不同权重之间的关系, 可以求得  $a_1, a_2$ :

$$a_1 = -(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^+ \mathbf{r}_2 = -\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H \mathbf{r}_2}{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^H (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)} \quad (16)$$

$$a_2 = 1 - a_1$$

图 2 的参数设置为:用户天线数 32,基站天线数为 128,调制方式 32QAM,仿真选用的总帧数  $L=20\ 000$ ;信噪比范围设置在  $-2:18$  dB;信源数据采用 randi 函数随机生成。

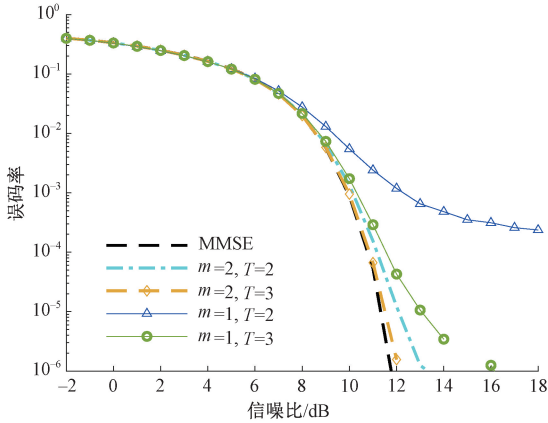


图 2  $m$  不同取值对应的误码率

Fig. 2 BER for different values of  $m$

通过图 2 可以发现,在  $m=1$ ,不采用整体修正法时,即使迭代 3 次,性能依然是比采用整体修正法要低,并且在迭代次数为 3 时,与理想值 MMSE 相比还是有一定的差距,而采用整体修正,迭代次数为 2 次时就要比  $m=1$  好,而且在迭代次数为 3 次时性能已经接近 MMSE,而如果继续增加近似解的个数,整体修正法的复杂度会成倍增加,但误码率改善有限,因此  $m$  值不必增加。

基于改进 Richardson 迭代的 MIMO 信号低复杂度信号检测如算法 1 所示。

算法 1 基于改进 Richardson 的信号检测算法

输入:  $\mathbf{y}; \mathbf{H}; \sigma^2; T; N; K$ ;

输出:  $\hat{\mathbf{x}}(T)$ ;

初始化  $\mathbf{b} = \mathbf{H}^H \mathbf{y}$ ;  $\omega = \frac{1}{N+K}$ ;

$\hat{\mathbf{x}}(0) = \omega \mathbf{b}$ ;  $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(0)$ ;

1) 循环

2) for  $t=1:T$

3) 当循环次数大于 1 时:  $\mathbf{r}^{(t-1)} = a_1 \mathbf{r}_1 + a_2 \mathbf{r}_2$ ;

4)  $\mathbf{p}^{(t-1)} = \mathbf{A} \mathbf{r}^{(t-1)}$ ;

5) 用式(11)来更新  $\mu^{(t)}$ ;

6) 用式(13)来更新迭代值  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ ;

7)  $\mathbf{x}_1 = \hat{\mathbf{x}}^{(t-1)}$ ;

8)  $\mathbf{x}_2 = \hat{\mathbf{x}}^{(t)}$ ;

9)  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}^{(t-1)}$ ;

10)  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_2$ ;

11) 用式(16)来求解权重  $a_1$  和  $a_2$ ;

12)  $\hat{\mathbf{x}}^{(t)} = a_1 \mathbf{x}_1 + a_2 \mathbf{x}_2$ ;

13) end for

## 3 性能分析

### 3.1 改进 Richardson 算法收敛性分析

改进 Richardson 算法采用迭代更新方式进行信号检测,算法收敛性对于算法精度有决定性意义,因此有必要对于改进算法的收敛性进行分析和证明。

首先将改进以后的算法式子可以改写为:

$$\hat{\mathbf{x}}^{(t+1)} = \mathbf{E}_{\text{改进R}} \hat{\mathbf{x}}^{(t)} + \mathbf{c} \quad (17)$$

其中更新矩阵为:

$$\mathbf{E}_{\text{改进R}} = (\mathbf{I} - \mu^{(t)} \mathbf{A})(\mathbf{I} - \omega \mathbf{A}) \quad (18)$$

改进算法的谱半径可以表示为:

$$\rho(\mathbf{E}_{\text{改进R}}) = \rho((\mathbf{I} - \mu^{(t)} \mathbf{A})(\mathbf{I} - \omega \mathbf{A})) \quad (19)$$

因为 MMSE 的滤波矩阵  $\mathbf{A}$  是正定矩阵,因此可以推断出  $(\mathbf{I} - \mu^{(t)} \mathbf{A})$  的范数小于 1<sup>[23]</sup>。由此可以发现  $\rho((\mathbf{I} - \mu^{(t)} \mathbf{A})) < 1$ ,同时也可以发现其实  $\rho((\mathbf{I} - \omega \mathbf{A}))$  也是 Richardson 算法的谱半径,通过特征值可以求得:

$$\rho(\mathbf{E}_{\text{R}}) = \max |\lambda(\mathbf{E}_{\text{R}})| = \frac{N}{N+K} \sqrt{\frac{4K}{N}} \quad (20)$$

根据  $N \gg K$ ,通过式(20)可以明显的发现 Richardson 算法的谱半径小于 1。同时也可以发现:

$$\rho(\mathbf{E}_{\text{改进R}}) = \rho((\mathbf{I} - \mu^{(t)} \mathbf{A})(\mathbf{I} - \omega \mathbf{A}))$$

$$\rho(\mathbf{E}_{\text{R}}) = \rho((\mathbf{I} - \omega \mathbf{A})) \quad (21)$$

$$\rho(\mathbf{E}_{\text{改进R}}) < \rho(\mathbf{E}_{\text{R}})$$

迭代矩阵的谱半径越小,算法收敛速度就会越快,所以,改进 Richardson 算法的收敛速度比 Richardson 算法更快。

与此同时也要分析证明整体修正法对于迭代算法收敛的影响,可以发现两个互异解  $\mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{x}_2$  分别对应的残差向量为  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_1$  和  $\mathbf{r}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}_2$ ;修正后的解对应的残差向量可以表示为  $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^{(t)}$ 。将不同的残差向量作为一个空间向量,以原点作为向量的起始点,残差向量对应的点作为结束点,可以得到:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H \mathbf{r} &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_2 + a_1 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) = \\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_2 + \mathbf{Q}_2 \mathbf{y}_2) &= \\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H (\mathbf{r}_2 - \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^+ \mathbf{r}_2) &= \\ ((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^+) \mathbf{r}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

由此可以发现,  $\mathbf{r}$  是垂直于  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  构成的超平面,这也就说明:

$$\|\mathbf{r}\|_2 \leq \|\mathbf{r}_1\|_2 \quad (23)$$

$$\|\mathbf{r}\|_2 \leq \|\mathbf{r}_2\|_2$$

综合以上分析可以得到本文所提改进 Richardson 算法具有非常不错的收敛性能。



### 3.2 复杂度分析

对于大规模 MIMO 系统,计算复杂度是衡量检测器性能的重要指标之一。将一次实数乘法定义为 1,一个复数与一个常数相乘可以看作 2 次实数乘法,两个复数相乘可以看作 4 次实数乘法。 $\mathbf{H}^H \mathbf{H}$  的复杂度为  $8NK^2$ ,  $\mathbf{H}^H \mathbf{y}$  的复杂度为  $4NK$ 。

通过改进 Richardson 算法的迭代形式,计算每一步的复杂性。

#### 1) 初始解的复杂度

(1)  $\hat{\mathbf{x}}(0)$  的复杂度:涉及到一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{b}$  和常数  $\omega$  相乘,初始解的复杂度为  $2K$ 。

(2)  $\mathbf{r}^{(0)}$  的复杂度:包括一个  $K \times K$  的矩阵  $\mathbf{A}$  和一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{x}^{(0)}$ ,需要的复杂度是  $4K^2$ ;

#### 2) 最速下降部分的复杂度

(1)  $\mathbf{p}^{(i)}$  的复杂度:包括一个  $K \times K$  的矩阵  $\mathbf{A}$  和一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{r}^{(i-1)}$ ,需要的复杂度  $4K^2$ ;

(2)  $\mu^{(i-1)}$  的复杂度:包括一个  $1 \times K$  的向量  $(\mathbf{r}^{(i)})^H$  和一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{r}^{(i-1)}$ ;此外包括一个  $1 \times K$  的向量  $(\mathbf{p}^{(i)})^H$  和一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{r}^{(i-1)}$ ,需要的复杂度是  $4K$ 。

(3)  $\hat{\mathbf{x}}(i)$  的复杂度:包括一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{r}^{(i-1)}$  和常数  $\mu^{(i-1)} + \omega$ ;一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{p}^{(i-1)}$  和常数  $\omega \mu^{(i-1)}$ ,它的复杂度  $4K$ 。

#### 3) 整体修正部分的复杂度

(1)  $\mathbf{r}_2$  的复杂度:包括一个  $N \times K$  的矩阵  $\mathbf{A}$  和一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{x}_2$ ,复杂度是  $4K^2$ ;

(2)  $\mathbf{a}_1$  的复杂度:包括一个  $1 \times K$  的向量  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H$  和一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{r}_2$ ,还有一个  $1 \times K$  的向量  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^H$  和一个  $K \times 1$  的向量  $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ ,需要的复杂度是  $4K$ ;

(3)  $\hat{\mathbf{x}}(i)$  的复杂度:包括一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{x}_1$  和常数  $\mathbf{a}_1$ ,还有一个  $K \times 1$  的向量  $\mathbf{x}_2$  和常数  $\mathbf{a}_2$ ,需要的复杂度是  $4K$ 。

综合以上各部分复杂度,不同算法的复杂度如表 1 所示。

表 1 不同算法复杂度对比

Table 1 Comparison of complexity of different algorithms

算法	复杂度
MMSE <sup>[7]</sup>	$8K^3 + 8NK^2 + 8NK + 2K$
Richardson <sup>[17]</sup>	$8NK^2 + 2K + T(4K^2 + 2K)$
改进 Richardson	$8NK^2 + 2K + 4K^2 + T(8K^2 + 12K)$

## 4 仿真分析

为了能够验证所提改进 Richardson 算法的性能,采用 MATLAB 程序进行了仿真实验,采用误码率作为检测改进 Richardson 算法性能的评价指标,通过对 MMSE、传

统 Richardson 算法和改进 Richardson 算法检测性能进行蒙特卡洛仿真实验,比较不同算法的检测性能。仿真所用的总帧数  $L = 20\ 000$ ;信噪比范围设置在  $-2:18$  dB;信源数据采用 randi 函数随机生成,天线采用了两种配置  $32 \times 128$  和  $64 \times 256$ ;调制方式采用了 64QAM 和 32QAM 两种方式。

如图 3 所示为 32QAM 调制方式下,用户数和基站天线数分别为 32 和 128 情况下,3 种算法的误码率曲线,可以明显发现传统 Richardson 算法迭代次数在达到 6 次时,算法收敛效果依然不理想,误码率只是近似在  $10^{-5}$ ,对比起来,改进算法通过采用最速下降法来进行收敛加速,收敛速度比传统算法更快,并且通过整体修正法,来修正检测结果,误码率也更低。图中可以看出在改进算法迭代两次时,误码率性能优于 Richardson 算法迭代 6 次,并且改进 Richardson 算法在迭代次数为 3 时,性能已非常接近最小均方误差算法的结果。在迭代次数为 2 时,信噪比在 13 dB 左右时,误码率已基本降到  $10^{-6}$ 。

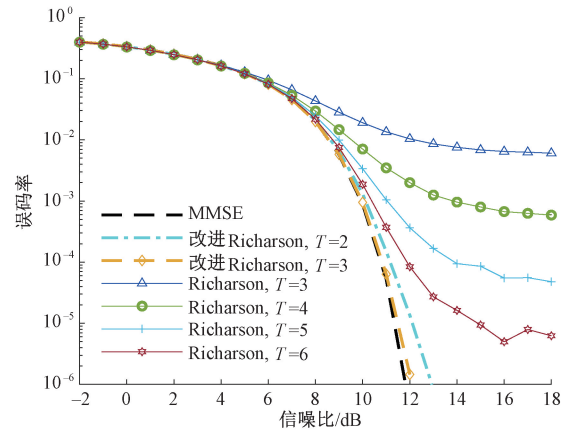


图 3 在 32QAM 和  $32 \times 128$  的条件下,不同的信噪比信号的误码率

Fig. 3 BER of signals with different SNRs under the conditions of 32QAM and  $32 \times 128$

如图 4 表示的是在 64QAM 条件下,各个算法的误码率性能曲线,通过图 3 和 4 对比可以发现,改进算法迭代 2 次,误码率  $10^{-5}$  时,32QAM 比 64QAM 信噪比要提高 1 dB 左右,与此同时改进算法在迭代 3 次时,性能依然与 MMSE 算法基本一致,可以发现随着调制方式提高,该算法依然存在优势。Richardson 通过采用最速下降法,来提高收敛,整体修正法来纠正检测结果,可以在一定程度上避免因调制方式提高误码率变高。

如图 5 采用了 32QAM,基站天线数和用户数分别增加到了 256 和 64。通过对比图 3 和 5 发现,随着基站天线数和用户数增加,系统误码率下降变慢,但整体误码率得到改善,图 5 传统 Richardson 算法在迭代 6 次时,信噪

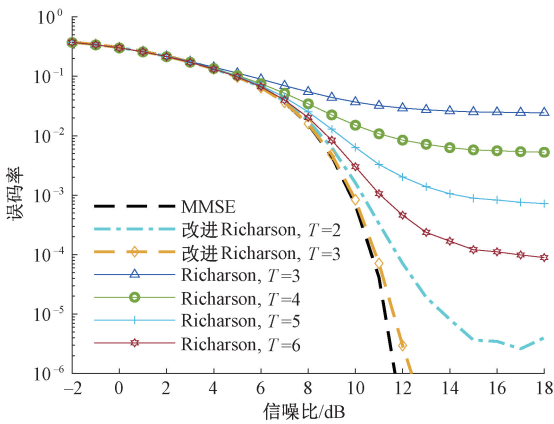


图 4 在 64QAM 和 32×128 的条件下，不同的信噪比信号的误码率

Fig. 4 BER of signals with different SNRs under 64QAM and 32×128

比在 16 dB 误码率可以降到  $10^{-6}$ ，而改进 Richardson 无论迭代 2 次还是 3 次信噪比在 14 dB 左右就可以使误码率降到  $10^{-6}$ ，性能比传统算法好 2 dB 左右。总体可以发现，该算法可以有效弥补传统算法面临天线和用户数提高，误码率整体收敛变慢的问题。

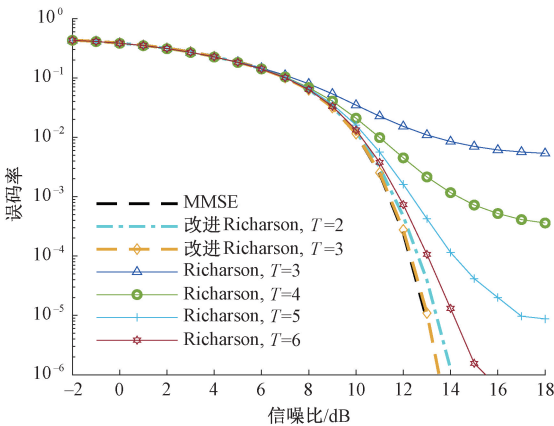


图 5 在 32QAM 和 64×256 的条件下，不同的信噪比信号的误码率

Fig. 5 BER of signals with different SNRs under 32QAM and 64×256

图 6 表示的是 64QAM 调制下，用户数和天线数分别为 64 和 256，不同算法的误码率，通过图 6 和 4 对比，可以发现改进算法和 MMSE 算法在误码率达到  $10^{-6}$  时，天线数和用户数的增加会导致信噪比的提高。图 6 改进 Richardson 在迭代 2 次时，在 17 dB 左右已经达到  $10^{-6}$  数量级；同其他仿真图相同，改进算法在迭代 3 次时依然与 MMSE 算法性能基本相同。综合以上仿真图可以看出，Richardson 在利用最速下降法和整体修正法时，可以弥

补天线和用户数提高以及调制方式的提高带来的误码率以及收敛速度问题。

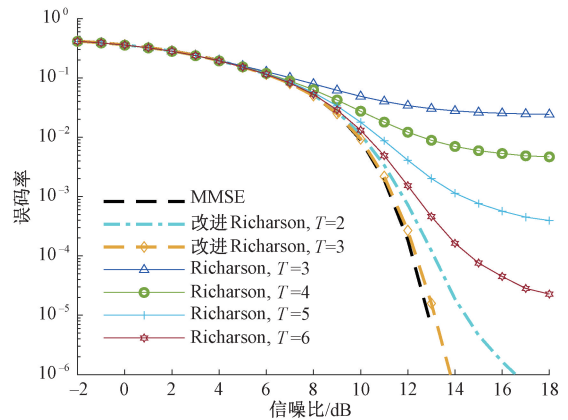


图 6 在 64QAM 和 64×256 的条件下，不同的信噪比下信号的误码率

Fig. 6 BER of signals with different SNRs under 64QAM and 64×256

### 5 结 论

传统的 MMSE 算法可以达到近似最优的性能，但由于高维矩阵的逆运算，使得运算的复杂度太高，不利于应用在实际场景中。本文提出了一种改进的 Richardson 算法，该算法将最速下降法和整体修正法与 Richardson 相结合，加快了算法的收敛速度，仅需要 3 次迭代便可以达到 MMSE 算法的性能，便于对信号进行实时处理。仿真结果表明，该算法可以以较少的迭代次数近似于 MMSE 算法，因此改进后的算法可以在检测性能和实现复杂度方面达到平衡。

### 参考文献

[ 1 ] 申滨, 赵书锋, 金纯. 基于迭代并行干扰消除的低复杂度大规模 MIMO 信号检测算法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(12): 2970-2978.  
SHEN B, ZHAO SH F, JIN CH. Low complexity iterative parallel interference cancellation detection algorithms for massive MIMO systems [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2018, 40(12): 2970-2978.

[ 2 ] CHANG M X, CHANG W Y. Maximum-likelihood detection for MIMO systems based on differential metrics[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2017, 65(14): 3718-3732.

[ 3 ] BARBERO L G, THOMPSON J S. Fixing the complexity of the sphere decoder for MIMO detection [J]. IEEE

- Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(6): 2131-2142.
- [ 4 ] TAN X, XU W, SUN K, et al. Improving massive MIMO message passing detectors with deep neural network [ J ]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 69(2): 1267-1280.
- [ 5 ] TAN X, XU W, ZHANG Y, et al. Efficient expectation propagation massive MIMO detector with Neumann-series approximation [ J ]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2019, 67(10): 1924-1928.
- [ 6 ] RIADI A, BOULOUIRD M, HASSANI M M R. ZF and MMSE detectors performances of a massive MIMO system combined with OFDM and M-QAM modulation [ J ]. Wireless Personal Communications, 2021, 116(4): 3261-3276.
- [ 7 ] LIM H, YOON D. On the distribution of SINR for MMSE MIMO systems [ J ]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(6): 4035-4046.
- [ 8 ] FANG L, XU L, HUANG D D. Low complexity iterative MMSE-PIC detection for medium-size massive MIMO [ J ]. IEEE Wireless Communications Letters, 2015, 5(1): 108-111.
- [ 9 ] ZHANG C, LIANG X, WU Z, et al. On the low-complexity, hardware-friendly tridiagonal matrix inversion for correlated massive MIMO systems [ J ]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2019, 68(7): 6272-6285.
- [ 10 ] SAXENA P, PATEL S B, BHALANI J K. Channel estimation scheme for MIMO communication using generalized Cholesky decomposition and back substitution methods [ J ]. Radioelectronics and Communications Systems, 2021, 64(6): 319-324.
- [ 11 ] ZHANG C, WU Z, STUDER C, et al. Efficient soft-output Gauss-Seidel data detector for massive MIMO systems [ J ]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2018, 68(12): 5049-5060.
- [ 12 ] YU A, JING S, TAN X, et al. Efficient successive over relaxation detectors for massive MIMO [ J ]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2020, 67(6): 2128-2139.
- [ 13 ] ZHANG Z, DAI X, DONG Y, et al. A low-complexity signal detection utilizing AOR iterative method for massive MIMO systems [ J ]. China Communications, 2017, 14(11): 269-278.
- [ 14 ] 申滨, 赵书锋, 黄龙杨. 基于 Jacobi 迭代的大规模 MIMO 系统低复杂度软检测算法 [ J ]. 北京邮电大学学报, 2017, 40(5): 55-60.
- SHEN B, ZHAO SH F, HUANG L Y. Low-complexity soft-output signal detection based on Jacobi iterative method for uplink large-scale MIMO systems [ J ]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2017, 40(5): 55-60.
- [ 15 ] QIN X, YAN Z, HE G. A near-optimal detection scheme based on joint steepest descent and Jacobi method for uplink massive MIMO systems [ J ]. IEEE Communications Letters, 2015, 20(2): 276-279.
- [ 16 ] ZHAO X, LI Z, XING S, et al. An improved Jacobi-based detector for massive MIMO systems [ J ]. Information, 2019, 10(5): 165.
- [ 17 ] KANG B, YOON J H, PARK J. Low complexity massive MIMO detectors based on Richardson method [ J ]. ETRI Journal, 2017, 39(3): 326-335.
- [ 18 ] DENG Q, LIANG X, WANG X, et al. Fast converging iterative precoding for massive MIMO systems: An accelerated weighted Neumann series-steepest descent approach [ J ]. IEEE Access, 2020, 8: 50244-50255.
- [ 19 ] NARASIMHAN T L, CHOCKALINGAM A. Channel hardening-exploiting message passing (CHEMP) receiver in large-scale MIMO systems [ J ]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2014, 8(5): 847-860.
- [ 20 ] 何怡刚, 程彤彤, FARHAN A, 等. 大规模 MIMO 系统下的低复杂度迫零预编码技术 [ J ]. 电子测量与仪器学报, 2021, 35(6): 140-146.
- HE Y G, CHENG T T, FARHAN A, et al. Low complexity ZF precoding in massive MIMO systems [ J ]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2021, 35(6): 140-146.
- [ 21 ] 王明月, 李方伟, 景小荣, 等. 大规模 MIMO-TRDMA 系统中的改进 SOR 信号检测算法 [ J ]. 通信学报, 2021, 42(10): 153-161.
- WANG M Y, LI F W, JING X R, et al. Improved SOR signal detection algorithm in massive MIMO-TRDMA systems [ J ]. Journal on Communications, 2021, 42(10): 153-161.
- [ 22 ] JIN F, LIU Q, LIU H, et al. A low complexity signal detection scheme based on improved Newton iteration for massive MIMO systems [ J ]. IEEE Communications Letters, 2019, 23(4): 748-751.
- [ 23 ] BJÖRCK Å. Numerical Methods in Matrix Computations [ M ]. Berlin: Springer, 2015: 613-638.

## 作者简介



**代涛**, 2020 年于河北大学获得学士学位, 现为江南大学在读研究生, 主要研究方向为大规模 MIMO 信号检测技术等。

E-mail: 6201924065@stu.jiangnan.edu.cn

**Dai Tao** received his B. Sc. degree from Hebei University in 2020. Now he is a M. Sc.

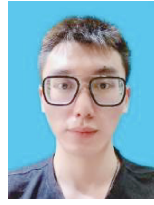
candidate in Jiangnan University. His main research interests include massive MIMO technology and signal detection.



**李正权** (通信作者), 2003 年于上海交通大学获得博士学位, 现为江南大学教授, 主要研究方向为大规模 MIMO 技术和可见光通信研究。

E-mail: lzq722@jiangnan.edu.cn

**Li Zhengquan** (Corresponding author) received his Ph. D. degree from Shanghai Jiaotong University in 2003. Now he is a professor in Jiangnan University. His main research interests include massive MIMO technology and visible light communication.



**王舟明**, 2020 年于苏州科技大学获得学士学位, 现为江南大学在读研究生, 主要研究方向为大规模 MIMO 预编码技术等。

E-mail: 869164420@qq.com

**Wang Zhouming** received his B. Sc. degree from Suzhou University of Science and Technology in 2020. Now he is a M. Sc. candidate in Jiangnan University. His main research interests include massive MIMO technology and precoding.



**邢松**, 博士, 现为加州州立大学信息系教授, 主要研究方向为无线和移动通信、计算机网络、互联网统计测量和信息检索。

E-mail: sxing@exchange.calstatela.edu

**Xing Song**, Ph. D. Now he is a professor in Information Systems, California State University, Los Angeles, USA. His main research interests include wireless and mobile communications, computer networks, Internet statistical measurement, and information retrieval.