

基于分数混合阶的交叠组合稀疏全变分 HFOGSTV 去噪模型^{*}

杨传兵¹ 周先春¹ 陈楷¹ 张洁²

(1. 南京信息工程大学人工智能学院 南京 210044; 2. 温州市平阳县气象局 温州 325499)

摘要:针对全变分(TV)模型引起的阶梯效应,造成图像出现块状伪影的问题,提出了基于分数混合阶的交叠组合稀疏正则项全变分(HFOGSTV)去噪模型。考虑到交叠组合稀疏正则项与分数阶微分能够抑制全局以及局部的块状伪影的特点,将二者引入TV模型,可以较好地抑制阶梯效应。并引入高阶微分,提高模型的去噪效率,构建了基于HFOGSTV去噪模型。新模型采用交替方向乘子法(ADMM)分解为各个子问题进行依次迭代求解,并选择合适的参数。实验结果表明,HFOGSTV模型与非局部均值去噪(NLM)、TV和混合非凸高所交叠组合稀疏全变分(HNHOTV-OGS)模型相比,峰值信噪比(PSNR)分别提升7.2%、5.3%、1.9%,结构相似性(SSIM)分别提升6.6%、6.1%、3.4%,耗时分别减少89%、51%、45%,不仅有效抑制了阶梯效应,而且去噪效果更佳,运行时长大大降低。

关键词:图像去噪;交叠组合稀疏;分数阶微分;交替方向乘子算法

中图分类号: TN911; TP751.1 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4050

Overlapping combined sparse total variation HFOGSTV denoising model based on fractional mixing order

Yang Chuanbing¹ Zhou Xianchun¹ Chen Kai¹ Zhang Jie²

(1. School of Artificial Intelligence, Nanjing University of Information Science & Technology, Nanjing 210044, China;

2. Meteorological Bureau of Pingyang County, Wenzhou City, Wenzhou 325499, China)

Abstract: Aiming at the problem of block-like artifacts in images caused by the staircase effect caused by total variation (TV) model, this paper proposes an overlapping combined sparse regular term denoising HFOGSTV model based on fractional mixing order. Considering that the overlapping combination of sparse regularization term and fractional differentiation can suppress global and local block artifacts, this paper introduces them into the TV model to better suppress the ladder effect. Furthermore, high-order differentiation is introduced to improve the denoising efficiency of the model, and an overlapping combined sparse regular term denoising HFOGSTV model based on fractional mixing order is constructed. The new model is decomposed into each subproblem by alternating direction multiplier ADMM method, and the appropriate parameters are selected. The experimental results show that compared with the NLM, TV, and HNHOTV-OGS models, the PSNR of the HFOGSTV model increases by 7.2%, 5.3%, and 1.9%, respectively, and the SSIM increases by 6.6%, 6.1%, and 3.4%, respectively, while the running time decreases by 89%, 51%, and 45%, respectively. It not only effectively suppresses the staircase effect, but also has better denoising effect and greatly reduces the running time.

Keywords: image denoising; overlapping combination sparse; fractional differentiation; alternating direction multiplier algorithm

收稿日期:2023-08-30

^{*} 基金项目:国家级大学生创新创业训练计划支持项目(202310300036Z)、南京信息工程大学大学生创新创业训练计划项目(XJDC202310300326)资助

0 引言

图像处理技术^[1]在社会生产生活发挥着不可或缺的作用。在医疗、航天、交通以及计算机视觉等各个领域,图像处理技术均获得了广泛的应用。然而,在图像形成、图像记录、图像传输等过程所涉及的技术,会引入各种类型的噪声和伪影。因此,图像去噪成为了图像处理的首要任务。目前主要的图像去噪算法可以分为两类,一类是基于深度学习^[2-3]的图像去噪算法,另一类是基于传统模型的图像去噪算法。基于深度学习的去噪算法虽然效果较好,但是所需算力较大,时间较长。基于传统模型的去噪算法中,主要有滤波算法^[4]、多尺度变换算法^[5]和偏微分方程算法^[6-7]等。其中,基于偏微分方程(partial differential equation, PDE)的图像去噪模型可以灵活设置参数并拥有可以良好的保持边缘的特性,成为目前图像去噪中有效的方法之一。

在偏微分方程去噪方法中,全变分正则化技术对图像去噪有重大作用。Rudin等^[8]提出了基于 l_1 范数的正则化函数,以此替代原来的 l_2 范数,解决了各向同性先验项的缺陷,由此提出经典的全变分(total variation, TV)模型。该模型能根据噪声图像全变分比原始图像大,利用图像不同梯度差刻画图像,继而进行平滑操作。TV模型能够有效去除噪声和保护图像边缘等细节,但由于它假定图像的平滑区域为分段光滑区域,求解时容易导致阶梯效应,即产生一些图像中不存在的伪影信息。由此可见,传统的TV模型很难满足要求。

针对全变分模型的不足,全变分模型经过了多种改进^[9-10]。同时使用一阶与二阶正则项的广义全变分模型(total generalized variation, TGV)模型^[11]被提出。TGV模型加大了平滑区域的平滑力度,但是模型仍会产生阶梯效应。鲁思琪等学者^[12]提出了改进的自适应全变分模型,改变指数函数,实现在一阶和二阶正则项的自适应去噪效果。但是,该模型仍存在着阶梯效应。为了抑制阶梯效应,结合高阶全变分与惩罚项的全变分(high-order total variation, HDTV)模型^[13]被提出。高阶模型虽然可以抑制阶梯效应,但是会模糊图像边缘信息。为了实现抑制阶梯效应的同时保护图像的边缘,Liu等^[14]结合了稀疏特性对正则项进行改进,提出了基于交叠组合稀疏正则项的全变分(overlapping group sparsity total variation, OGSTV)模型。模型充分利用周边像素点梯度信息,突出边缘区与平滑区的差异,实现去噪保边的效果。但是,模型的去噪能力和保护边缘的能力仍有待提升。Kumar等^[15]提出了加权交叠组合稀疏的去噪模型,更加突出了边缘区与平滑区的差异。近年来,采用分数阶微分的全变分正则项模型越来越多。张俊等^[16]结合 Bayesian-MAP 框架下的泊松似然函数,提出了一种新的分数阶全变分模型。该模型不仅可以保护纹理细节信息,也一定程度上抑制了阶梯效应,但是模型的去噪能力仍有待提升。综上所述,目前存

在的多种改进的TV模型很难在抑制图像的阶梯效应、保护边缘信息、去噪效果和去噪效率这4个方面做到完全兼顾。

考虑到交叠组合稀疏正则项与分数阶微分能够抑制全局以及局部的块状伪影的特点,本文将二者引入到TV模型中,并引入高阶微分,提高去噪效率,提出了基于分数阶的交叠组合稀疏正则项全变分(high frequency overlapping group sparse total variation, HFOGSTV)去噪模型。采用交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)将新模型分解为各个子问题进行迭代求解。考虑到模型参数的选择会极大地影响模型的去噪效果,本文对模型的参数进行了讨论。与多种模型相比,HFOGSTV模型去噪效果更佳,也有效抑制了图像的阶梯效应,并且去噪效率大幅提高。

1 相关算法理论

1.1 TV模型

为了实现图像去噪的同时,保护图像的纹理细节信息,提出了全变分TV模型,定义如下。

对于灰度图像 $u \in \mathbf{R}^{n \times n}$,离散梯度算子 $\nabla u: \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow (\mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{R}^{n \times n})$ 的定义如下:

$$(\nabla u)_{i,j} = ((\nabla_x u)_{i,j}, (\nabla_y u)_{i,j}) \quad (1)$$

其中:

$$(\nabla_x u)_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j}, & i < n \\ u_{1,j} - u_{n,j}, & i = n \end{cases} \quad (2)$$

$$(\nabla_y u)_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j}, & j < n \\ u_{i,1} - u_{i,n}, & j = n \end{cases} \quad (3)$$

对于 $i, j = 1, 2, \dots, n$,其中 $u_{i,j}$ 是图像中的第 (i, j) 个像素,并且 ∇_x 和 ∇_y 分别是水平和垂直梯度操作符。则 u 的离散全变分模型是:

$$TV(u) = \|\nabla u\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |(\nabla u)_{i,j}| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sqrt{|(\nabla_x u)_{i,j}|^2 + |(\nabla_y u)_{i,j}|^2} \quad (4)$$

由式(4)可以看出,由于TV正则项形式很难对 u 进行求导,因此不便于求解,且由于其考虑到的是一阶差分,只对相邻像素进行联系,而未涉及其他距离较远的像素,因此会产生阶梯效应。

1.2 分数阶全变分模型

分数阶微分具有抑制图像阶梯效应的能力,将其引入TV模型中,对图像的阶梯效应有所改善。分数阶微分定义如下,其定义采用了便于计算的离散形式,对于 x 方向和 y 方向的定义如下:

$$\nabla_x^\alpha u(i, j) \approx \sum_{k=0}^K \Psi_\alpha(k) u(i-k, j) \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$$

$$\nabla_y^\alpha u(i, j) \approx \sum_{k=0}^K \Psi_\alpha(k) u(i, j-k) \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N$$

其中, $\Psi_\alpha(k) = (-1)^k \Gamma(\alpha+1)/[k! \Gamma(\alpha-k+1)]$ 。
 ∇_x^α 和 ∇_y^α 分别表示大小为 $M \times N$ 的图像 u 在 (i, j) 处垂直和水平方向上的离散分数阶导数。

基于分数阶微分与 TV 正则化函数的分数阶全变分 (FOTV) 正则项表达式为:

$$FOTV(u) = \|\nabla u\|_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} |(\nabla u)_{i,j}| = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sqrt{|(\nabla_x^\alpha u)_{i,j}|^2 + |(\nabla_y^\alpha u)_{i,j}|^2} \quad (7)$$

将 FOTV 正则项代入 TV 模型中, 得到:

$$FOTV(u) = TV^\alpha(u) = \|\nabla^\alpha u\|_1 = \sum_{i,j} |(\nabla^\alpha u)_{i,j}| \quad (8)$$

式(8)为最终的分数阶全变分 FOTV 模型表达式。

1.3 交叠组合稀疏

针对图像的二维情况, 若图像 u 大小为 $N \times M$, 一个 $K \times K$ 的群组大小则可以定义为:

$$\tilde{u}_{i,j,K,K} = \begin{bmatrix} u_{i-a_1,j-a_1} & u_{i-a_1,j-a_1+1} & \cdots & u_{i-a_1,j+a_2} \\ u_{i-a_1+1,j-a_1} & u_{i-a_1+1,j-a_1+1} & \cdots & u_{i-a_1+1,j+a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i+a_2,j-a_1} & u_{i+a_2,j-a_1+1} & \cdots & u_{i+a_2,j+a_2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K} \quad (9)$$

式中: $a_1 = \lfloor \frac{K-1}{2} \rfloor$, $a_2 = \lfloor \frac{K}{2} \rfloor$, 其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示取对 x 向下取整。对于二维数组的重叠群稀疏性 (OLGS) 函数定义为:

$$\phi(u) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|\tilde{u}_{i,j,K,K}\|_2 \quad (10)$$

式中: $u_{i,K}(\cdot)$ 是通过叠加矩阵 $\tilde{u}_{i,K}(\cdot)$ 的列而获得的向量。此时可以定义基于垂直和水平方向上的图像梯度的正则化项 $\phi(u)$ 如下:

$$\phi(u) = \phi(\nabla_x u) + \phi(\nabla_y u) \quad (11)$$

式中: ∇_x 与 ∇_y 即为式(2)、(3)中提到的离散梯度算子。

此时, $\phi(u)$ 表示交叠组合稀疏的正则化项。特别地, 当 $K=1$ 时, $\phi(u)$ 即表示各向异性全变分正则项。对于分数阶正则项而言, 交叠组合稀疏只需要改变离散梯度算子为分数阶算子即可, 即 $\phi(u) = \phi(\nabla_x^\alpha u) + \phi(\nabla_y^\alpha u)$, $\nabla_x^\alpha u$ 与 $\nabla_y^\alpha u$ 由式(5)、(6)得出。

2 HFOGSTV 去噪模型

2.1 HFOGSTV 去噪模型

在图像去噪的过程中, TV 模型忽略了邻域的信息, 对于图像中梯度接近的噪声与边缘不能很好地区分, 噪声得不到很好地去除, 并且边缘还存在阶梯效应。考虑到交叠组合稀疏和分数阶微分可以抑制阶梯效应的特点, 将二阶应用于图像正则项中, 可以有效地缓解阶梯效应。在此基础上引入高阶微分, 提高去噪的效率, 构建了 HFOGSTV 去噪模型。HFOGSTV 模型的表达式为:

$$\min_u \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \phi(\nabla u) + \omega \|\nabla^2 u\|_p^p + \beta \phi(\nabla^\alpha u) + \Xi_c(u) \quad (12)$$

式中: $\lambda > 0$ 是平衡数据保真项与一阶正则化项的正则化参数, $\omega > 0$ 是平衡数据保真项和非凸二阶正则化项的正则化参数, $\beta > 0$ 是平衡数据保真项与分数阶正则化项的正则化参数。 $\phi(\cdot)$ 表示交叠组合稀疏的算子, ∇ 是一阶差分运算, ∇^2 是在一阶差分运算基础上的二阶差分运算, ∇^α 是式(5)、(6)中的分数阶差分运算。 $\Xi_c(\cdot)$ 是一个特征函数, 表达式为:

$$\Xi_c(u) = \begin{cases} 0, & u \in C \\ +\infty, & u \notin C \end{cases} \quad (13)$$

2.2 基于 ADMM 法的 HFOGSTV 去噪模型算法

引入辅助变量, 将式(12)进行转化, 得到:

$$\min_u \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \phi(v) + \omega \|w\|_p^p + \beta \phi(g) + \Xi_c(z) \quad (14)$$

s. t. $v = \nabla u, w = \nabla^2 u, g = \nabla^\alpha u, z = u$

对式(14)使用 ADMM 算法, 将式(14)转化为增广拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L_A(u, v, w, g, z; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = & \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 + \phi(v) + \beta \phi(D^\alpha u) + \omega \|w\|_p^p + \Xi_c(z) - \mu_1^T(v - \nabla u) + \\ & \frac{\rho}{2} \|v - \nabla u\|_2^2 - \mu_2^T(w - \nabla^2 u) + \frac{\rho}{2} \|w - \nabla^2 u\|_2^2 - \\ & \mu_3^T(g - \nabla^\alpha u) + \frac{\rho}{2} \|g - \nabla^\alpha u\|_2^2 - \mu_4^T(z - u) + \\ & \frac{\rho}{2} \|z - u\|_2^2 \end{aligned} \quad (15)$$

式中: ρ 是与三部分的二次惩罚项 $\|v - \nabla u\|_2^2$, $\|w - \nabla^2 u\|_2^2$, $\|g - \nabla^\alpha u\|_2^2$ 有关的惩罚参数, μ_1, μ_2, μ_3 和 μ_4 是基于式(12)的约束所取的拉格朗日乘子。

对于 ADMM 算法而言, 求解原始问题式(12), 也即使求解拉格朗日函数, 即式(15)问题 $L_A(u, v, w, g, z; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ 的鞍点, 两问题的解是等价的。

式(15)的鞍点问题, 要通过交替最小化拉格朗日函数 $L_A(u, v, w, g, z; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ 来实现。问题中的变量包含 $u, v, w, g, z; \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 的约束, 可以按照 ADMM 算法的原理, 将其原问题转化为如下问题进行求解:

$$\begin{cases} u^{k+1} = \arg\min_u L_A(u, v^k, w^k, g^k, z^k; \mu_1^k, \mu_2^k, \mu_3^k, \mu_4^k) \\ v^{k+1} = \arg\min_v L_A(u^{k+1}, v, w^k, g^k, z^k; \mu_1^k, \mu_2^k, \mu_3^k, \mu_4^k) \\ w^{k+1} = \arg\min_w L_A(u^{k+1}, v^{k+1}, w, g^k, z^k; \mu_1^k, \mu_2^k, \mu_3^k, \mu_4^k) \\ g^{k+1} = \arg\min_g L_A(u^{k+1}, v^{k+1}, w^{k+1}, g, z^k; \mu_1^k, \mu_2^k, \mu_3^k, \mu_4^k) \\ z^{k+1} = \arg\min_z L_A(u^{k+1}, v^{k+1}, w^{k+1}, g^{k+1}, z; \mu_1^k, \mu_2^k, \mu_3^k, \mu_4^k) \\ \mu_1^{k+1} = \mu_1^k + \rho(\nabla u^{k+1} - v^{k+1}) \\ \mu_2^{k+1} = \mu_2^k + \rho(\nabla^2 u^{k+1} - w^{k+1}) \\ \mu_3^{k+1} = \mu_3^k + \rho(\nabla^\alpha u^{k+1} - g^{k+1}) \\ \mu_4^{k+1} = \mu_4^k + \rho(z^{k+1} - u^{k+1}) \end{cases} \quad (16)$$

将式(16)分解为不同的子问题进行逐一讨论。对于子问题的求解,在式(16)中,去掉与所求子问题变量不相关的项,并最小化子问题变量,从而进行依次求解。

1)对于 u 的子问题,去掉与 u 不相关的项,将其展开得到:

$$\begin{aligned} u^{k+1} = \argmin_u & \frac{\lambda}{2} \|u - f\|_2^2 - \mu_1^T(v^k - \nabla u) + \\ & \frac{\rho}{2} \|v^k - \nabla u\|_2^2 - \mu_2^T(w^k - \nabla^2 u) + \frac{\rho}{2} \|w^k - \nabla^2 u\|_2^2 - \\ & \mu_3^T(g^k - \nabla^a u) + \frac{\rho}{2} \|g^k - \nabla^a u\|_2^2 - \mu_4^T(z^k - u) + \end{aligned}$$

$$u^{k+1} = F^{-1} \left(\frac{F \left[\lambda f + \rho \nabla^T (v^k - \frac{\mu_1^k}{\rho}) + \rho (\nabla^2)^T (w^k - \frac{\mu_2^k}{\rho}) + \rho (\nabla^a)^* (g^k - \frac{\mu_3^k}{\rho}) + \rho (z^k - \frac{\mu_4^k}{\rho}) \right]}{\lambda I + \rho [|F[\nabla]|^2 + |F[\nabla^2]|^2 + |F[(\nabla^a)]|^2 + I]} \right) \quad (19)$$

2)对于 v 的子问题,去掉与 v 不相关的项,将其展开得到:

$$\begin{aligned} v^{k+1} = \argmin_v & \phi(v) - \mu_1^T(v - \nabla u^{k+1}) + \\ & \frac{\rho}{2} \|v - \nabla u^{k+1}\|_2^2 = \argmin_v \frac{\rho}{2} \left\| v - \left(\nabla u^{k+1} + \frac{\mu_1^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \\ & \phi(v) \end{aligned} \quad (20)$$

观察 v 子问题的形式,可以发现这是交叠组合稀疏问题,对于交叠组合稀疏正则化项,如果设定的群的大小 $K = 1$,那么问题即和原始的 TV 模型求解一样,此时 $\phi(v) = \|v\|_1$ 。对于 $K > 1$ 的情况(K 为正整数),则可以通过 MM 算法进行迭代求解。

3)对于 w 的子问题,去掉与 w 不相关的项,将其展开得到:

$$\begin{aligned} w^{k+1} = \argmin_w & \|w\|_p - \mu_2^T(w - \nabla^2 u^{k+1}) + \\ & \frac{\rho}{2} \|w - \nabla^2 u^{k+1}\|_2^2 = \argmin_w \frac{\rho}{2} \left\| w - \left(\nabla^2 u^{k+1} + \frac{\mu_2^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \\ & \|w\|_p \end{aligned} \quad (21)$$

采用迭代的重新加权 (IRL1) 算法进行求解:

$$w^{k+1} = \text{shrink} \left(x^{k+1}, \frac{t_i \omega}{\rho} \right) = \max \left\{ |x^{k+1}| - \frac{t_i \omega}{\rho}, 0 \right\} \cdot \text{sign}(x^{k+1}) \quad (22)$$

4)对于 g 的子问题中去掉与 g 不相关的项,将其展开得到:

$$\begin{aligned} g^{k+1} = \argmin_g & \beta \phi(g) - \mu_3^T(g - \nabla^a u^{k+1}) + \frac{\rho}{2} \|g - \\ & \nabla^a u^{k+1}\|_2^2 = \argmin_g \frac{\rho}{2} \left\| g - \left(\nabla^a u^{k+1} + \frac{\mu_3^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \beta \phi(g) \end{aligned} \quad (23)$$

观察 g 子问题的形式,与 v 子问题相同,同样是交叠组合稀疏问题,有两部分改变,一是算子的变化,由 v 子问题的一阶差分转化为 g 子问题的分数阶,二是 g 子问题在正则化项前加入了参数 β 。因此,对于 g 子问题的交叠组合稀疏正则化项,如果设定的群的大小 $K = 1$,那么问题

$$\frac{\rho}{2} \|z^k - u\|_2^2 \quad (17)$$

由式(17)可以发现这属于最小二乘问题,因此通过式(18)正态方程进行计算。

$$\begin{aligned} & (\lambda I + \rho \nabla^T \nabla + \rho (\nabla^2)^T \nabla^2 + \rho (\nabla^a)^* (\nabla^a) + \rho I) u = \\ & \lambda f - \nabla^T \mu_1 + \rho \nabla^T v^k - (\nabla^2)^T \mu_2 + \rho (\nabla^2)^T w^k - (\nabla^a)^* \mu_3 + \\ & \rho (\nabla^a)^* g^k - \mu_4 + \rho z^k \end{aligned} \quad (18)$$

在 u 的周期性边界条件下, $\nabla^T \nabla$, $(\nabla^2)^T \nabla^2$ 和 $(\nabla^a)^* \nabla^a$ 可以进行快速傅里叶变换。计算结果如下:

即可以转化为分数阶 TV 模型。而对于 $K > 1$ 的情况(K 为正整数),其中固定的参数 β 可以进行等价转换为 1 计算,即问题转化为:

$$g^{k+1} = \beta \argmin_g \frac{\rho}{2\beta} \left\| g - \left(\nabla^a u^{k+1} + \frac{\mu_3^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \phi(g) \quad (24)$$

5)对于 z 的子问题,去掉与 z 不相关的项,将其展开得到:

$$\begin{aligned} z^{k+1} = \argmin_z & \Xi_z(z) - \mu_4^T(z - u^{k+1}) + \frac{\rho}{2} \|z - u^{k+1}\|_2^2 = \\ & \argmin_z \frac{\rho}{2} \left\| z - \left(u^{k+1} + \frac{\mu_4^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \Xi_z(z) \end{aligned} \quad (25)$$

z 子问题的形式即是对问题进行有效约束,将图像像素约束在 $C = [0, 255]$,使用的 $\Xi(\cdot)$ 是一个特征函数,可以视作一个投影运算符,将问题约束为一个具有上下限的结果,可以通过将问题按照 C 的大小进行投影,设置最小值为 0,最大值为 255,即可以得到有效解决。

6)拉格朗日乘数的更新,更新可以按照设置的步长进行迭代如下。

$$\begin{cases} \mu_1^{k+1} = \mu_1^k + \rho(\nabla u^{k+1} - v^{k+1}) \\ \mu_2^{k+1} = \mu_2^k + \rho(\nabla^2 u^{k+1} - w^{k+1}) \\ \mu_3^{k+1} = \mu_3^k + \rho(\nabla^a u^{k+1} - g^{k+1}) \\ \mu_4^{k+1} = \mu_4^k + \rho(z^{k+1} - u^{k+1}) \end{cases} \quad (26)$$

综上所述,HFOGSTV 模型算法具体计算流程如下。

算法 1 HFOGSTV 去噪模型算法

1. 输入 f 。
2. 输入参数 $\lambda > 0, \omega > 0, \beta > 0$, 群大小 K, ρ , 最大迭代次数 $N_{\max}$, 误差标准 ϵ 。
3. 初始化参数 $u_0 = f, k = 0, \mu_i = 0, i = 1, 2, 3, 4$ 。
4. 预计算矩阵 $|F[\nabla]|^2, |F[\nabla^2]|^2, |F[(\nabla^a)]|^2$ 。
5. 开始循环。

对子问题进行更新:

6. $\mathbf{v}^{k+1} = \underset{\mathbf{v}}{\operatorname{argmin}} \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{v} - \left(\nabla \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\boldsymbol{\mu}_1^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \phi(\mathbf{v})$
7. $\mathbf{w}^{k+1} = \operatorname{shrink} \left(\mathbf{x}^{k+1}, \frac{\mathbf{t}_i \omega}{\rho} \right) = \max \left\{ \left| \mathbf{x}^{k+1} \right| - \frac{\mathbf{t}_i \omega}{\rho}, 0 \right\} \cdot \operatorname{sign}(\mathbf{x}^{k+1})$
8. $\mathbf{g}^{k+1} = \underset{\mathbf{g}}{\operatorname{argmin}} \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{g} - \left(\nabla^a \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\boldsymbol{\mu}_3^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \beta \phi(\mathbf{g})$
9. $\mathbf{u}^{k+1} = F^{-1} \left[F \left[\lambda \mathbf{f} + \rho \nabla^T \left(\mathbf{v}^k - \frac{\boldsymbol{\mu}_1^k}{\rho} \right) + \rho (\nabla^2)^T \left(\mathbf{w}^k - \frac{\boldsymbol{\mu}_2^k}{\rho} \right) + \rho (\nabla^a)^T \left(\mathbf{g}^k - \frac{\boldsymbol{\mu}_3^k}{\rho} \right) + \rho \left(\mathbf{z}^k - \frac{\boldsymbol{\mu}_4^k}{\rho} \right) \right] \right] / \left[\lambda \mathbf{I} + \rho [|F[\nabla]|^2 + |F[\nabla^2]|^2 + |F[(\nabla^a)]|^2 + \mathbf{I}] \right]$
10. $\mathbf{z}^{k+1} = \underset{\mathbf{z}}{\operatorname{argmin}} \frac{\rho}{2} \left\| \mathbf{z} - \left(\mathbf{u}^{k+1} + \frac{\boldsymbol{\mu}_4^k}{\rho} \right) \right\|_2^2 + \Xi_c(\mathbf{z})$

对拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\mu}_i$ 进行更新:

11. $\boldsymbol{\mu}_1^{k+1} = \boldsymbol{\mu}_1^k + \rho(\nabla \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{v}^{k+1})$
12. $\boldsymbol{\mu}_2^{k+1} = \boldsymbol{\mu}_2^k + \rho(\nabla^2 \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{w}^{k+1})$
13. $\boldsymbol{\mu}_3^{k+1} = \boldsymbol{\mu}_3^k + \rho(\nabla^a \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{g}^{k+1})$
14. $\boldsymbol{\mu}_4^{k+1} = \boldsymbol{\mu}_4^k + \rho(\mathbf{z}^{k+1} - \mathbf{u}^{k+1})$

15. 在循环中满足误差标准:

$$\frac{\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|}{\|\mathbf{u}_k\|} \leq \varepsilon$$

退出循环,得到去噪图像:

16. $k = k + 1$
17. 满足循环停止标准。
18. 结束循环。

2.3 HFOGSTV 模型参数选择

以 Boat (512×512) 图像,添加噪声为高斯噪声 ($\sigma = 15$) 为例,对 HFOGSTV 模型中的正则化参数 λ, ω, β , 交叠组合稀疏的群大小 K , 分数阶微分算子所取的分数阶数 α , 求解交叠组合稀疏所使用的 MM 算法的迭代次数 N_{in} 和模型的收敛性依次进行讨论。

1) 正则化参数的调整

正则化参数包括 λ, ω, β 3 项,正则化参数的变化会极大地影响图像去噪的质量,选择了过大或过小的正则化参数,都会使去噪效果急剧降低。

首先,对控制数据保真项的参数 λ 进行选取,在本文不考虑模糊核的情况下,针对加性噪声, λ 参数对于图像去噪的质量产生很大的影响,选取 $\lambda \in [0.15, 0.95]$, 取值 $\lambda \approx 0.35$ 对于多数图片及噪声滤除均有较好的效果。

其次,需要对二阶正则化项的正则化参数 ω 进行调整,只依赖于正则化参数 λ 来去噪,会导致去噪图像出现块状或斑点伪影,同时,交叠组合稀疏正则项的引入会使得部分区域过于平衡, ω 的取值变化可以从局部去除伪影,并保存清晰的纹理,根据对于不同图片的实验,对于 $\omega \in [1, 7]$, 并根据图片的差异进行调整,可以获得最佳

的去噪指标峰值信噪比(PSNR)和结构相似性(SSIM)。

正则化参数 β 时控制分数阶正则项的参数,选取合适的 β 同样可以很好的利用分数阶微分的特点,对图像去除块效应,保存纹理细节。因为该正则化参数与 λ 相关联,其取值 $\beta \in [\lambda, 30\lambda]$ 能取得较好效果。

2) w 子问题中参数 p 的调整

w 子问题中的参数 p 对于边缘的保持起着重要的作用,对于定义 $p \in [0.1, 1]$, 固定其他参数不变,改变 p 的取值,观察 Boat 图像的去噪指标 PSNR、SSIM 值,以及去噪时间的变化情况。变化曲线如图 1~3 所示。

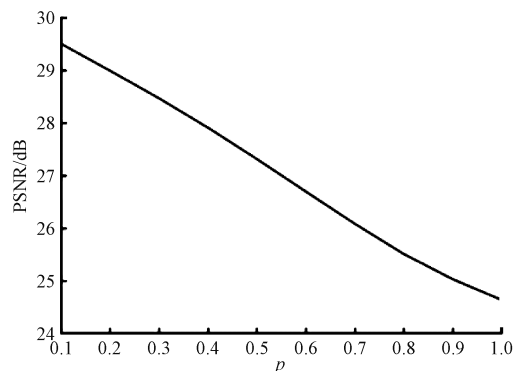


图 1 HFOGSTV 模型的 PSNR 随参数 p 改变曲线

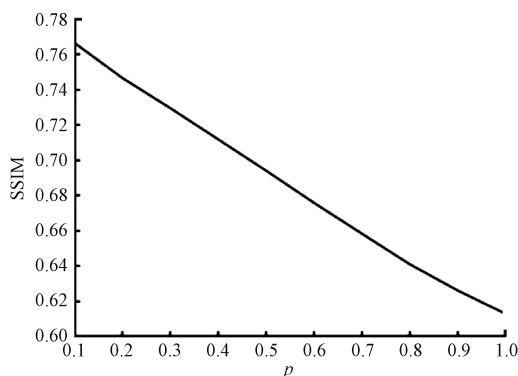


图 2 HFOGSTV 模型的 SSIM 随参数 p 改变曲线

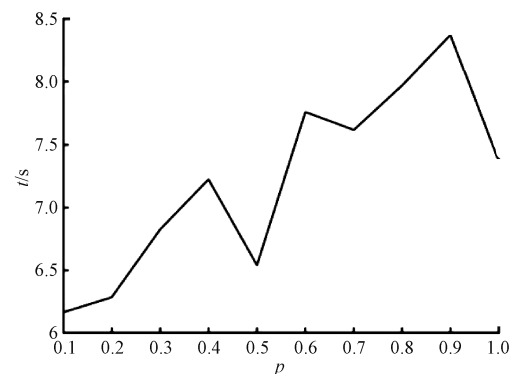


图 3 HFOGSTV 模型的耗时 t 随参数 p 改变曲线

分析图 1~3 发现,在 p 变化时,去噪模型的收敛速度差异不大,但其 PSNR 和 SSIM 值会随着 p 的增加而逐渐

下降,这也导致了图像边缘清晰程度会下降,当 $p = 0.1$ 时,图像的边缘得到了很好的保留,当 $p = 0.9$ 图像的细节能被过渡平滑,因此选择 $p = 0.1$ 作为实验参数。

3) 群大小 K 与分数阶正则项阶数 α 的调整

实验中对于分数阶的阶数 $\alpha < 2$, 取值 $\alpha \in [0.8, 2]$, 并在保持其他参数不变的情况下,改变 K 的取值,从 2~7 依次取值,依次获得不同群大小 K 与分数阶正则项阶数 α 时的新模型的 PSNR、SSIM, 运算时长以及残留误差,得到结果如图 4~7 所示。

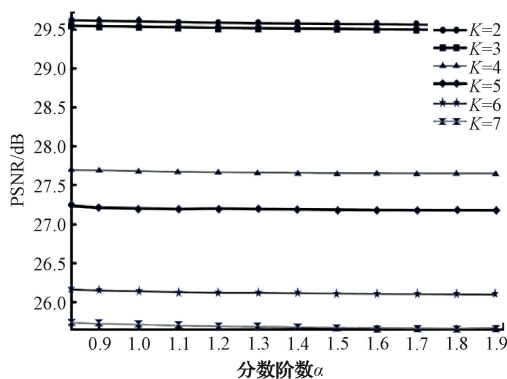


图4 HFOGSTV模型在不同群大小 K 时 PSNR 随分数阶数 α 改变曲线

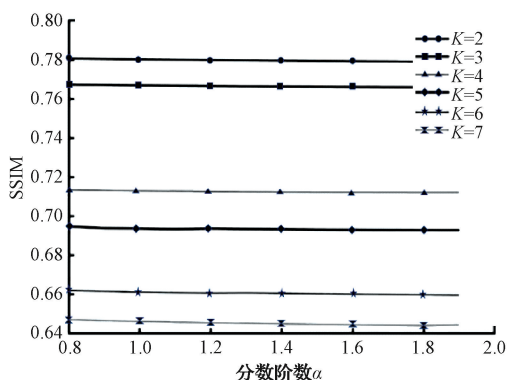


图5 HFOGSTV模型在不同群大小 K 时 SSIM 随分数阶数 α 改变曲线

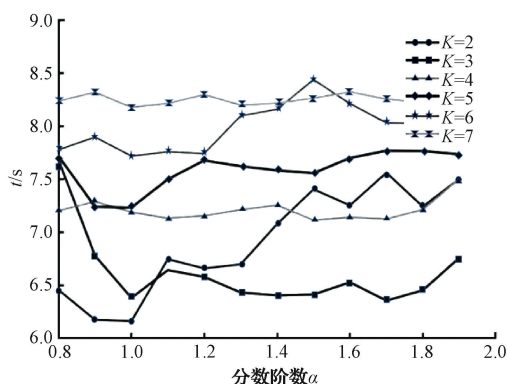


图6 HFOGSTV模型在不同群大小 K 时耗时 t 随分数阶数 α 改变曲线

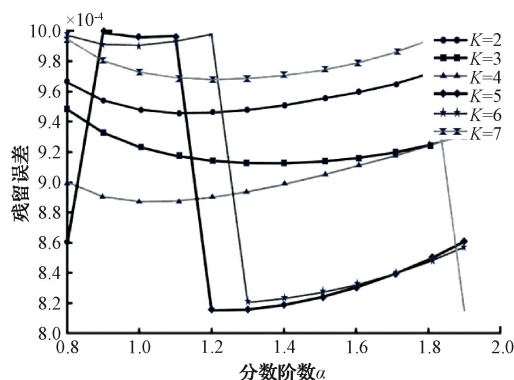


图7 HFOGSTV模型在不同群大小 K 时残留误差随分数阶数 α 改变曲线

由图 4~7 可以发现,当群大小 K 取值不变时,随着分数阶数的增加,去噪指标 PSNR、SSIM 会缓慢下降。而分数阶数不变时,群大小 K 的变化会产生显著影响,随着群大小 K 的增大,去噪效果会不断下降。而在去噪时长方面,发现随分数阶数的增大,取 $K = 3$ 的算法耗时最短。综合考虑,平衡去噪效果 PSNR、SSIM 与耗时以及收敛效果,选择群大小 $K = 3$, 分数阶数 $\alpha = 1.4$ 。

4) 内置 MM 算法 N_{in} 迭代次数的调整

针对 HFOGSTV 模型的 MM 算法内置迭代次数 N_{in} , 固定新模型其他参数,改变迭代次数 N_{in} , 得到新模型对应的 PSNR、SSIM, 和耗时的变化曲线如图 8~10 所示。

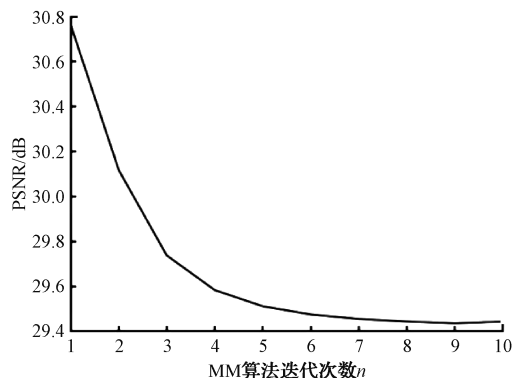


图8 HFOGSTV模型的 PSNR 随 MM 迭代次数改变曲线

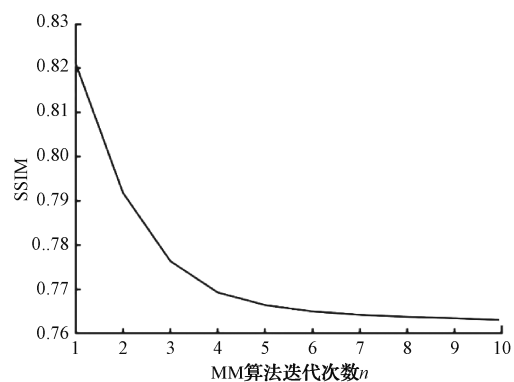


图9 HFOGSTV模型的 SSIM 随 MM 迭代次数改变曲线

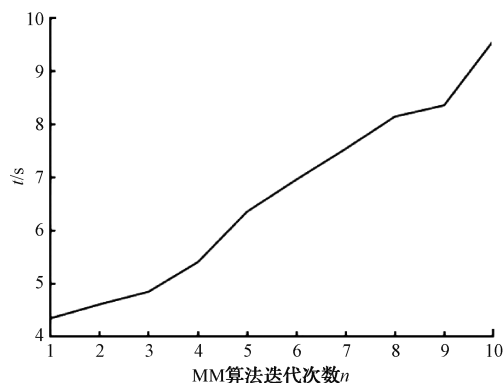


图10 HFOGSTV模型的耗时 t 随 MM 迭代次数改变曲线

新模型性能指标 PSNR、SSIM 及耗时具体数值变化情况如表 1 所示。

观察图 8~10 和表 1 可知,增加 MM 迭代次数 N_{in} 对于去噪效果相关参数 PSNR、SSIM 影响较小,在达到一定范围后增加迭代次数 N_{in} 基本不改变最终去噪结果,但却会使得整体算法耗时不断增加。因此,综合考虑去噪效果与耗时,在本文算法中选取 MM 迭代次数 $N_{in} = 5$ 。

5) 收敛性分析

从理论上进行分析,基于对使用的 ADMM 算法的收敛性研究,对于凸问题的求解,可以保证其收敛性。新模型中关于 $\mathbf{u}$ 子问题,基于循环性周期边界,其中包含的 $|F[\nabla]|^2$ 、 $|F[\nabla^2]|^2$ 、 $|F[(\nabla^\circ)]|^2$ 都可以形成结构化矩阵再进行求解。对于 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{g}$ 变量,其子问题均使用 MM

表 1 HFOGSTV 模型的各指标随 MM 算法迭代次数变化

迭代次数	1	2	3	4	5	6	7
PSNR/dB	30.764	30.117	29.737	29.583	29.511	29.475	29.455
SSIM	0.821	0.791	0.776	0.769	0.766	0.764	0.764
耗时/s	4.342	4.605	4.846	5.403	6.354	6.958	7.538
迭代次数	8	9	10	25	50	100	
PSNR/dB	29.443	29.436	29.443	29.433	29.432	29.432	
SSIM	0.763	0.763	0.763	0.762	0.762	0.762	
耗时/s	8.146	8.359	9.578	16.352	29.778	58.268	

算法进行求解,其收敛性可以保证。关于 $\mathbf{w}$ 变量,其结构满足讨论的框架,使用 IRL1 算法求解,已被证明是收敛的,因此 HFOGSTV 模型的收敛性可以保证。

在实践中,算法的收敛性可以进行如下验证,在最高迭代次数以内,根据算法的迭代停止条件:

$$\frac{\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|}{\|\mathbf{u}_k\|} \leq \varepsilon \quad (27)$$

式(27)可以理解为当连续近似值之间的相对差满足停止标准时,输出的去噪图像即为近似的预期图像。定义

误差 $RelErr = \frac{\|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|}{\|\mathbf{u}_k\|}$, 针对 HFOGSTV 模型,其

变化趋势如图 11~13 所示,可以观察到,对于 K 的不同

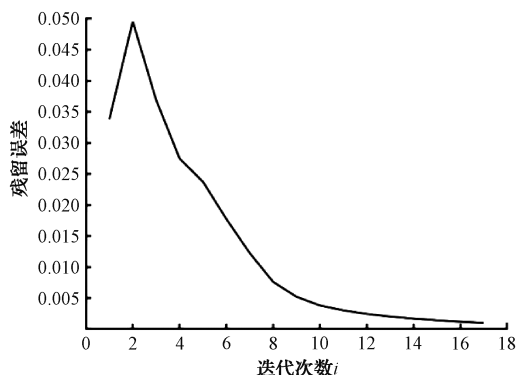


图11 残留误差随 MM 迭代次数改变曲线

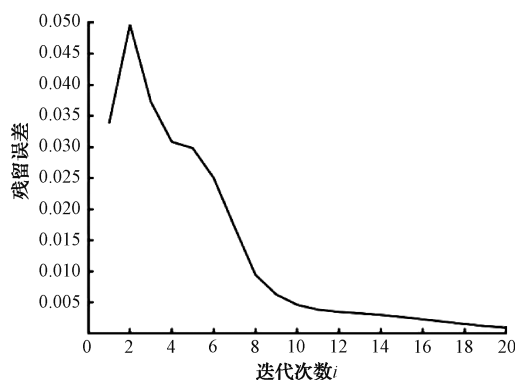


图12 残留误差随 MM 迭代次数改变曲线

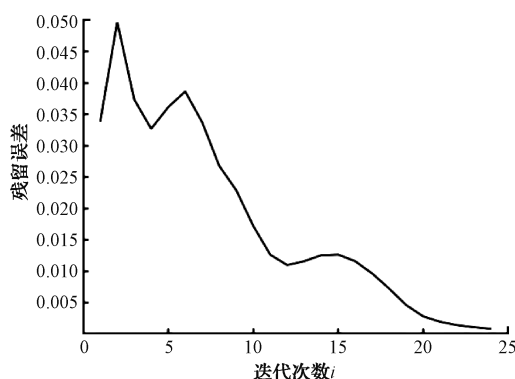


图13 残留误差随迭代次数改变曲线

取值,残留误差 $RelErr$ 均随迭代次数的增加而单调减小,最终收敛,只是收敛速度有不同,随着 K 取值变大,收敛所需要的迭代次数会增加,但同样验证了算法的收敛性。

3 实验结果与分析

本文以 Lena 等 4 张图进行实验,在实验过程中,使用处理器为 Intel(R) Core(TM) i5-8250UCPU@1.60 GHz,内存为 8.00 GB,系统为 Windows 10 家庭中文版,使用的 MATLAB 版本为 R2019a。采用的测试图片大小均为 512×512 ,在原始图像的基础上,添加标准差 $\sigma=15, 20, 25, 30$ 的高斯白噪声,并采用非局部均值去噪(NLM)模型,TV 模型,混合非凸高阶交叠组合稀疏全变分(HN-HOTV-OGS)模型和 HFOGSTV 模型进行去噪,设置参数,观察 4 种模型的 PSNR 值、SSIM 值和计算时长 t 。4 张原图如图 14 所示。



图 14 4 张原图像(512×512)

本文所选择数据集包含了丰富的细节、纹理变化,涵盖了不同方向、频率和大小的特征,是考察算法鲁棒性和性能的理想选择。Lena 图和 Barbara 图的人物面部、头发部分和呢子外衣部分,Boat 图的船体、船缆和水面部分,还有 Peppers 图中不同的辣椒表面和背景部分都具有很复杂的纹理特征和细节。通过对这几张图片添加各种不同的高斯噪声,可以评估模型在不同情况下的性能表现,证明方法具有普适性。数据集涵盖了不同类型的图像,例如蔬菜、人物肖像、交通工具等。这样可以确保模型的鲁棒性和通用性。

3.1 客观去噪图像指标值

表 2~4 分别为在不同噪声标准差下,对于 Lena、Barbara、Boat、Peppers 4 张测试图片,使用 NLM、TV、HN-HOTV-OGS 以及新 HFOGSTV 模型得出的 PSNR、SSIM 以及耗时数(加粗数值为某一噪声下,针对某一图片的效果最好的算法数值)。

表 2 在不同噪声标准差下的各算法 PSNR 值 (dB)

高斯噪声标准差	图片	NLM	TV	HNHO TV-OGS	新模型
$\sigma=15$	Lena	30.431	30.395	32.530	33.477
	Barbara	27.657	24.679	28.212	29.126
	Boat	27.480	27.854	29.374	29.512
	Peppers	30.715	31.033	32.343	32.618
$\sigma=20$	Lena	30.312	30.256	32.025	32.112
	Barbara	27.603	24.709	27.709	27.826
	Boat	27.498	27.810	29.319	29.425
	Peppers	30.554	30.723	31.688	31.894
$\sigma=25$	Lena	29.995	30.012	29.924	30.671
	Barbara	27.425	24.720	26.260	26.604
	Boat	27.406	27.698	28.794	28.873
	Peppers	30.164	30.294	30.669	30.962
$\sigma=30$	Lena	29.249	29.487	29.924	30.207
	Barbara	26.941	24.641	24.344	25.643
	Boat	27.016	27.404	27.129	27.564
	Peppers	29.306	29.605	30.094	30.174

表 3 不同噪声标准差下的各算法 SSIM 值

高斯噪声标准差	图片	NLM	TV	HNHO TV-OGS	新模型
$\sigma=15$	Lena	0.846	0.850	0.844	0.902
	Barbara	0.796	0.702	0.826	0.854
	Boat	0.703	0.725	0.764	0.766
	Peppers	0.820	0.826	0.847	0.850
$\sigma=20$	Lena	0.841	0.846	0.879	0.880
	Barbara	0.795	0.702	0.812	0.808
	Boat	0.708	0.726	0.733	0.774
	Peppers	0.816	0.820	0.830	0.839
$\sigma=25$	Lena	0.818	0.838	0.780	0.855
	Barbara	0.783	0.702	0.710	0.758
	Boat	0.703	0.726	0.765	0.766
	Peppers	0.796	0.811	0.824	0.827
$\sigma=30$	Lena	0.761	0.813	0.780	0.842
	Barbara	0.747	0.692	0.584	0.708
	Boat	0.676	0.716	0.678	0.707
	Peppers	0.745	0.786	0.807	0.815

从表 2~4 可以发现,本文提出的新模型在去噪指标 PSNR 与 SSIM 中比较其他算法,在绝大多数情况下均有优异表现,个别情况的差异可能是由于测试图像在某种特定噪声中对别的算法更加适用,比如 NLM 搜索块正好匹配等。但是在去噪时长方面,本文算法由于使用了交替方向乘子 ADMM 法,并且对各子问题也应用了优化的求解方法,运算时长较其他算法得到了显著降低,这也验证了本文新算法的优越性。

表 4 在不同噪声标准差下的各算法耗时 (s)

高斯噪声 标准差	图片	NLM	TV	HNHOTV- OGS-OGS	新模型
$\sigma=15$	Lena	55.506	11.947	10.758	5.906
	Barbara	51.994	10.652	11.095	5.677
	Boat	53.922	10.364	10.881	6.347
	Peppers	54.164	10.655	9.720	5.956
$\sigma=20$	Lena	54.474	10.472	10.152	6.546
	Barbara	51.505	10.477	9.921	6.238
	Boat	58.428	10.233	12.010	6.494
	Peppers	57.560	10.787	8.856	6.867
$\sigma=25$	Lena	51.707	10.510	9.584	8.645
	Barbara	53.828	10.308	8.914	6.818
	Boat	56.480	10.786	11.622	6.331
	Peppers	58.415	10.618	11.157	5.938
$\sigma=30$	Lena	53.019	10.364	11.349	6.695
	Barbara	55.151	10.256	8.350	5.666
	Boat	52.059	10.312	8.916	7.698
	Peppers	57.429	10.788	9.918	5.977

3.2 主观去噪图像对比

在 Lena 图像添加 $\sigma=20$ 的高斯白噪声,4 种模型的去噪结果如图 15 所示。

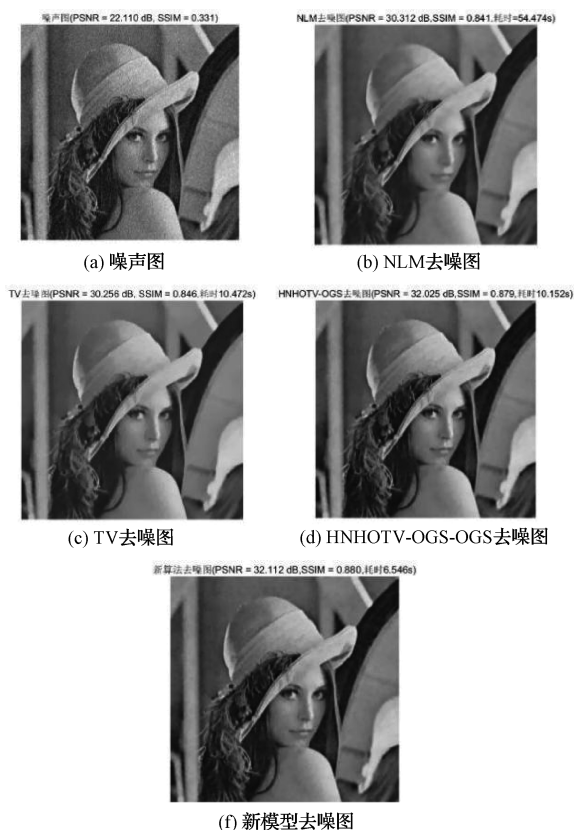


图 15 4 种模型的去噪结果

观察图 15 可以发现,新模型的去噪结果图噪声少,图像平滑,降噪效果较优。提取帽子羽毛局部图,如图 16 所示。可以发现图 16(a)和(b)纹理模糊,图 16(c)和(d)纹理清晰。结合运行时间分析,新模型的运行时间更短,纹理较清晰。经过分析,新模型的运行效率和去噪效果更佳。



图 16 4 种模型的去噪局部图

4 结 论

本文针对全变分 TV 模型引起的阶梯效应的问题,提出了 HFOGSTV 去噪模型。利用交叠组合稀疏正则项与分数阶微分能够抑制阶梯效应的特点,将二者引入到全变分模型中。并引入高阶微分,提高去噪效率,构建出 HFOGSTV 去噪模型。采用 ADMM 法对新模型进行分解,分解为各个子问题,并讨论了模型的参数选择问题和收敛问题。实验结果表明,与多种模型对比,HFOGSTV 模型有效抑制了阶梯效应,并且去噪效果更佳,去噪耗时大大降低。

参 考 文 献

- [1] 周涛,霍兵强,陆惠玲,等. 残差神经网络及其在医学图像处理中的应用研究[J]. 电子学报,2020,48(7): 1436-1447.
- [2] 陆县委,刘辉,尚振宏. 基于自监督深度学习的 NVST 图像去噪[J]. 激光与光电子学进展,2021,58(6):252-263.
- [3] 徐少平,李芬,陈孝国,等. 一种利用改进深度图像先验构建的图像降噪模型[J]. 电子学报,2022,50(7): 1573-1578.
- [4] 张雪峰,闫慧. 基于中值滤波和分数阶滤波的图像去噪与增强算法[J]. 东北大学学报(自然科学版),

- 2020,41(4):482-487.
- [5] 樊进,贾玲,檀怡,等.基于多尺度图像去噪正则化的图像修复[J].国外电子测量技术,2022,41(5):131-136.
- [6] 郭林,孟旭东.基于偏微分方程与多尺度分析的图像去噪算法[J].吉林大学学报(理学版),2019,57(4):882-888.
- [7] 周先春,伍子锴,石兰芳.小波包与偏微分方程相结合的图像去噪方法[J].电子测量与仪器学报,2018,32(7):61-67.
- [8] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physical D: Nonlinear Phenomena, 1992,60(1-4):259-268.
- [9] 呼亚萍,孔韦韦,李萌,等.改进TV图像去噪模型的全景图像拼接算法[J].计算机工程与应用,2021,57(17):203-209.
- [10] 周先春,吴婷,石兰芳,等.一种基于曲率变分正则化的小波变换图像去噪方法[J].电子学报,2018,46(3):621-628.
- [11] 王小玉,郭晓中.基于非局部总广义变分的图像去噪[J].计算机工程与科学,2017,39(8):1520-1524.
- [12] 鲁思琪,周先春,汪志飞.改进型自适应全变分图像降噪模型[J].电子测量与仪器学报,2022,36(6):236-243.
- [13] 胡悦,仲崇潇,曹梦宇,等.基于增广拉格朗日乘子的快速高阶全变分图像去噪方法[J].系统工程与电子技术,2017,39(12):2831-2839.
- [14] LIU J, HUANG T Z, SELESNICK I W, et al. Image restoration using total variation with overlapping group sparsity[J]. Information Sciences, 2015, 295:232-246.
- [15] KUMAR A, AHMAD M O, SWAMY M N S. An efficient denoising framework using weighted overlapping group sparsity [J]. Information Sciences, 2018,454:292-311.
- [16] 张俊,武婷婷,马明溪,等.分数阶整体变分正则化的图像泊松去噪[J].南京邮电大学学报(自然科学版),2018,38(4):36-39.

作者简介

杨传兵,本科,主要研究方向为图像处理。

E-mail:3264255676@qq.com

周先春,博士,教授,硕士生导师,主要研究方向为图像处理、模式识别、智能信号处理。

E-mail:zhouxc2008@163.com