

# 一种新的小波阈值函数在图像去噪中的应用\*

荣霞 薛伟 朱继超

(中国地质大学自动化学院 武汉 430074)

**摘要:**为了解决传统的小波阈值函数在图像去噪中存在的一些问题,提出了一种新的阈值函数进行去噪。新的阈值函数和传统的软硬阈值函数相比,它弥补了硬阈值函数不连续的不足之处,同时又保留了与软阈值函数一样的连续性,减小了软阈值函数中存在的恒定偏差。新的阈值函数表达式简单且高阶可导,易于各种数学处理。对图像的仿真实验表明,相比软硬阈值函数和软硬阈值折中函数,该方法具有更好的去噪效果,具有较高的实用价值。

**关键词:**小波变换;阈值函数;图像去噪

**中图分类号:** TP391.41   **文献标识码:** A   **国家标准学科分类代码:** 510.4050

## New wavelet thresholding function in image denoising

Rong Xia   Xue Wei   Zhu Jichao

(School of Automation, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China)

**Abstract:** A new thresholding function which is used in image denoising is proposed in this paper to solve the problems existed in the traditional wavelet thresholding functions. Compared with the traditional hard-thresholding function and soft-thresholding function, the new thresholding function overcomes the shortcoming of uncontinuity of hard-thresholding function and remains the continuity of soft-thresholding function as well as decreases the invariable dispersion in the soft-thresholding function. The new thresholding function is simple in expression and has a high order derivative, it is suitable to do some kinds of mathematical disposals. The simulation results for image show that this method has better denoising effect and higher practical value than the traditional hard- and soft-thresholding methods and soft and hard thresholding compromised methods.

**Keywords:** wavelet transform; thresholding function; image denoising

## 1 引言

图像在生成、传输等过程中容易受到各种噪声的干扰,这对信息的处理、传输和存储都造成很大的影响,故而需要对图像进行去噪处理。传统的图像去噪方法大致可分为两类——空域滤波法和频域滤波法<sup>[1-3]</sup>,空域滤波法在去除噪声和细节纹理的保留方面存在着矛盾,而频域滤波法则不能自适应地根据信号频率变化范围的大小动态地调整时频窗口的大小。在这种情况下,由于小波变换具有良好的多分辨率分析这一特性,使得它在图像处理中得到了广泛的应用<sup>[4-7]</sup>。

20世纪80年代,Mallat将计算机视觉领域内多尺度分析的思想引入到小波分析中,提出多分辨率分析概念,提出相应的小波分解与重构的快速算法——Mallat算法。Mallat算法为小波变换在实际的应用中奠定了一定的理论基础。之后,Mallat又根据信号和噪声经过

小波变换后在各尺度上的不同表现,提出了一种利用小波变换模极大值原理用于信号去噪的方法<sup>[8]</sup>。1995年,Donoho和Johnstone等人提出了信号去噪的软阈值方法和硬阈值方法<sup>[9]</sup>。同年,Donoho和Coifman又提出了平移不变小波去噪的方法<sup>[10]</sup>。随后,Gao和Bruce把Donoho的软阈值和硬阈值方法进行推广,提出了软硬阈值折中法<sup>[11]</sup>。

目前,在小波去噪的方法中,常用的是小波阈值去噪方法。这种方法一般采用硬阈值函数和软阈值函数这两种函数,它们各有特点但也有各自的不足之处,硬阈值函数可以很好地保存图像的边缘、细节等局部特征,但由于它的不连续,所以图像会产生一些伪吉布斯效应、振铃等失真现象<sup>[12]</sup>;而软阈值函数在定义域内是连续的,所以它处理后的图像相对较平滑,但它处理之后的小波系数和估计的小波系数之间存在一个恒定的偏差值,故可能会产生边缘模糊等失真现象。正是由于这些缺点的存在,所以限制了小

收稿日期:2015-07

\*基金项目:湖北省自然科学基金(2015CFB520)资助项目

波阈值去噪的进一步应用<sup>[13]</sup>。因此,为了克服这些缺点,本文在传统的阈值函数的基础上提出了一种新的阈值函数,以期达到更好的图像去噪效果。

## 2 图像的小波变换

图像是一种二维信号,而二维小波变换有两种方法,一种是张量积方法,它是一维小波变换的推广;另外一种是多小波方法,它是一种各向异性的二维小波变换<sup>[1]</sup>。本文中使用的张量积小波变换。

对于二维信号  $f(x,y) \in L^2(R^2)$ , 设  $V^2$  是  $L^2(R^2)$  的二维多分辨率分析, 则函数的子空间为:  $V_j^2 = V_j \oplus W_j$ , 其中, “ $\oplus$ ”表示张量积。并且令二维尺度函数为:  $\Phi(x,y) = \mathcal{O}(x)\mathcal{O}(y)$ , 其中  $\mathcal{O}(x)$  为对应的一维多分辨率分析的尺度函数;  $V_j, W_j$  的正交基分别为  $\{\mathcal{O}_{j,k}\}, \{\varphi_{j,k}\}$ , 此时的二维小波空间  $W_j^2$  即可分解为二维平面的水平、垂直与对角三个方向的正交矢量子空间  $W_{1,j}, W_{2,j}$  和  $W_{3,j}$ , 则它们分别对应的二维小波函数为:

$$\begin{cases} \Psi_1(x,y) = \varphi(X)\mathcal{O}(y) \\ \Psi_2(x,y) = \varphi(X)\mathcal{O}(y) \\ \Psi_3(x,y) = \varphi(X)\mathcal{O}(y) \end{cases} \quad (1)$$

对于任意二维信号  $f(x,y) \in L^2(R^2)$ , 可将其做如下分解:

$$f(x,y) = \sum a_j \Phi_j(x,y) + \sum_{j \leq 1} \sum d_j^1 \Psi_j^1(x,y) + \sum_{j \leq 1} \sum d_j^2 \Psi_j^2(x,y) + \sum_{j \leq 1} \sum d_j^3 \Psi_j^3(x,y) \quad (2)$$

式中:

$$\begin{cases} a_j = \iint f(x,y)\Phi_j(x,y) dx dy \\ d_j^1 = \iint f(x,y)\Phi_j^1(x,y) dx dy \\ d_j^2 = \iint f(x,y)\Phi_j^2(x,y) dx dy \\ d_j^3 = \iint f(x,y)\Phi_j^3(x,y) dx dy \end{cases} \quad (3)$$

$a_j, d_j^1, d_j^2$  和  $d_j^3$  构成了  $f(x,y)$  的二维正交小波分解系数。 $a_j$  为  $f(x,y)$  的低频分量的小波分解系数,  $d_j^1$  为  $f(x,y)$  的高频分量在水平方向上的小波分解系数,  $d_j^2$  给出了  $f(x,y)$  的高频分量在垂直方向上的小波分解系数,  $d_j^3$  给出了  $f(x,y)$  的高频分量在对角线方向上的小波分解系数。 $a_j$  可视作原图像的一个近似图像, 而  $d_j^1, d_j^2, d_j^3$  则分别显示了水平、垂直与对角方向上的边缘信息。多分辨率分析可以向更低的频率上分解, 每次分解后分辨率减半, 分解以后的子图像由低频的近似图像和原图像在水平、垂直和对角线方向上的高频部分的细节信息组成。

## 3 小波阈值去噪

假设存在大小为  $m \times n$  的图像, 用  $f(i,j)$  表示, 则其噪声模型为:

$$S(i,j) = f(i,j) + \sigma e(i,j) \quad (4)$$

式中:  $e$  为高斯白噪声。

在图像去噪中使用二维小波变换的步骤有 3 步, 具体如下<sup>[15-16]</sup>:

1) 对图像信号进行小波分解。在此过程中, 根据具体的带分解的图像选择恰当的分解层数(记为  $N$ ) 和一个合适的小波函数, 然后对该二维图像信号进行  $N$  层小波分解计算。

2) 对分解处理后的高频系数进行阈值量化。在此过程中, 对于分解后的每一层即  $1 \sim N$  层, 选择一个合适的阈值, 并对每一层的高频系数进行阈值量化处理。

3) 重构图像信号。根据处理后的低频系数和高频系数来进行二维信号的小波重构。小波分解以后的第  $N$  层的近似即为低频系数, 而高频系数是经过阈值量化处理后的各层细节。

在以上 3 个步骤之中, 最重要的就是阈值的选取以及如何进行阈值量化。传统的阈值量化的方法一般有硬阈值量化和软阈值量化, 分别如下:

$$y = \begin{cases} x, & |x| \geq T \\ 0, & |x| < T \end{cases} \quad (5)$$

$$y = \begin{cases} \text{sgn}(x)(|x| - T), & |x| \geq T \\ 0, & |x| < T \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $x$  为图像的原小波系数,  $y$  为阈值量化处理后的小波系数,  $T$  为阈值(其中式(5)为硬阈值量化法, 式(6)为软阈值量化法)。硬阈值处理的方法是将绝对值小于  $T$  的系数视为零, 而绝对值大于  $T$  的系数则保留原值不变。软阈值处理的方法是将绝对值小于  $T$  的系数视为零; 当系数大于或等于  $T$  时, 将该系数变为其减去  $T$  后的所得值; 当系数小于或等于  $-T$  时, 对该系数的处理方法是将其变为加上  $T$  后的所得值。图 1 和 2 分别为硬阈值函数和软阈值函数的示意图。

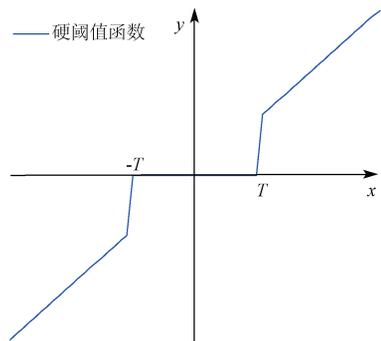


图 1 硬阈值函数图像

除了以上两种方法, 此外, 还有一种改进的处理方式, 叫软硬阈值折中法, 其表达式为:

$$y = \begin{cases} \text{sgn}(x)(|x| - bT), & |x| \geq T \\ 0, & |x| < T \end{cases} \quad (7)$$

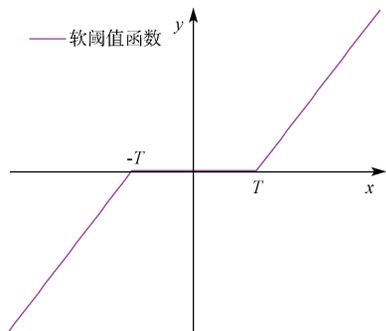


图 2 软阈值函数图像

式中： $b$  为调节因子且  $0 < b < 1$ ，图 3 为其函数图像。显然，当  $b=0$  时，该函数就变成了硬阈值函数，当  $b=1$  时就变成了软阈值函数，当  $0 < b < 1$  时，系数  $y$  的值就处在硬阈值函数和软阈值函数之间，故称之为软硬阈值折中函数。该方法思路简单，去噪效果良好。

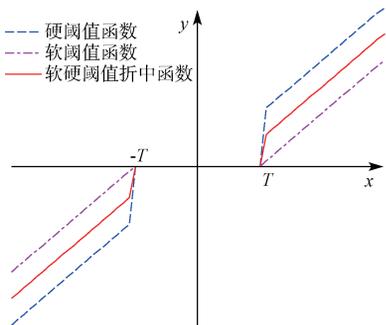


图 3 软硬阈值折中函数图像

#### 4 新的阈值函数

常用的软、硬阈值函数虽有较好的去噪效果但也有各自的不足之处。硬阈值函数能较好地保存图像边缘等局部特征，但由于在  $x = \pm T$  处不连续，所以图像会产生一些伪吉布斯效应、振铃等现象；而软阈值函数在定义域内连续，使用其处理后的图像相对较为平滑，但当  $|x| \geq T$  时， $y$  与  $x$  之间存在一个恒定的偏差  $T$ ，故可能会产生边缘模糊等现象。针对以上的这些不足之处，本文提出了一种新的阈值函数，其表达式为：

$$y = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) (|x| - e^{(-\frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln T)}), & |x| \geq T \\ 0, & |x| < T \end{cases} \quad (8)$$

式中： $a$  是调节因子，且  $a$  为大于 0 的常数。

考察函数

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) (|x| - e^{(-\frac{x}{a} + \frac{1}{a} \ln T)}) \quad (9)$$

当  $x=T$  时， $f(x)=T-Te^0=0$ ，当  $x=-T$  时， $f(x)=- (T-Te^0)=0$ ；当  $|x| \rightarrow \infty$  时， $f(x)=x$ 。

从以上分析可以看出， $f(x)$  是以  $y=x$  为渐近线的。这样，新阈值函数不仅具有和软阈值函数一样的连续性，

而且克服了硬阈值函数中  $y$  与  $x$  存在恒定偏差的缺点，除此之外，当  $|x| \geq T$  时是高阶可导的。图 4 为新阈值函数的示意图。

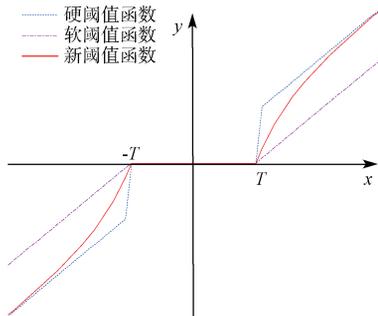


图 4 新阈值函数图像

当时  $a \rightarrow 0$ ，新阈值函数等价于硬阈值函数，当时，新阈值函数等价于软阈值函数，通过调节  $a$  可得到实用的阈值函数，获得更好的去噪效果。

#### 5 仿真实验

为了验证新阈值函数在图像中的去噪效果，本文使用了硬阈值函数、软阈值函数以及软硬阈值折中函数与之进行比较。实验中，给原始图像 ( $\sin \sin$ ) 分别加入标准差为 10、20 和 30 的噪声，使用的小波基是  $\operatorname{sym}4$ ，采用 3 层分解，阈值  $T = \sigma \sqrt{2 \log N}$  (其中  $\sigma$  为噪声的标准差，在实际应用中是不可知的， $N$  为图像的大小)。图 5~7 给出了不同噪声标准差下几种阈值函数去噪的结果，表 1 和 2 分别给出了不同噪声标准差下几种阈值函数去噪后的信噪比和均方误差。

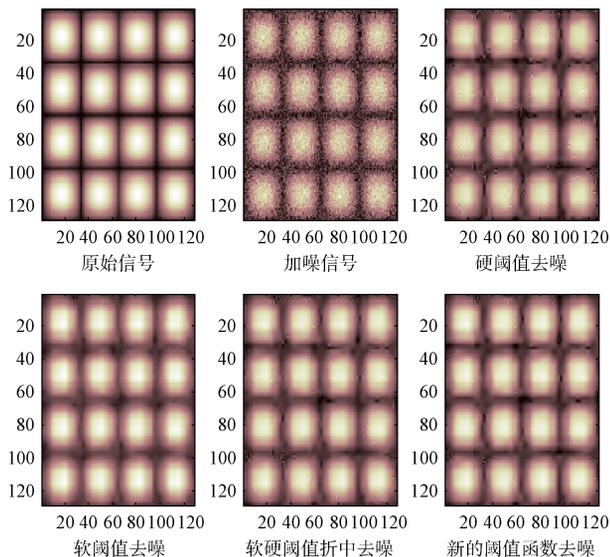


图 5  $\sigma=10$  时使用不同阈值函数去噪的对比

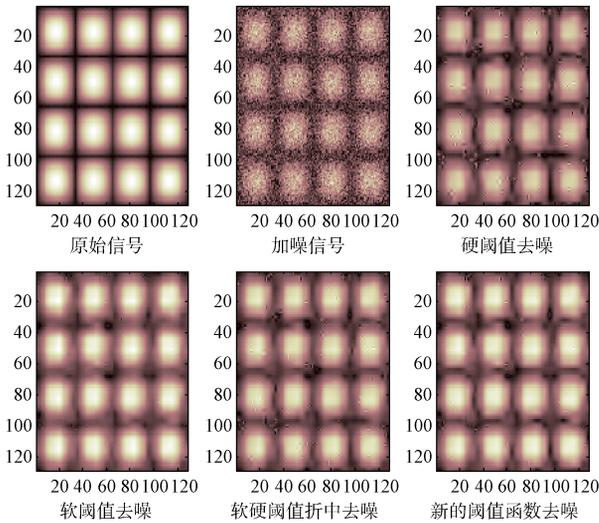


图 6  $\sigma=20$  时使用不同阈值函数去噪的对比

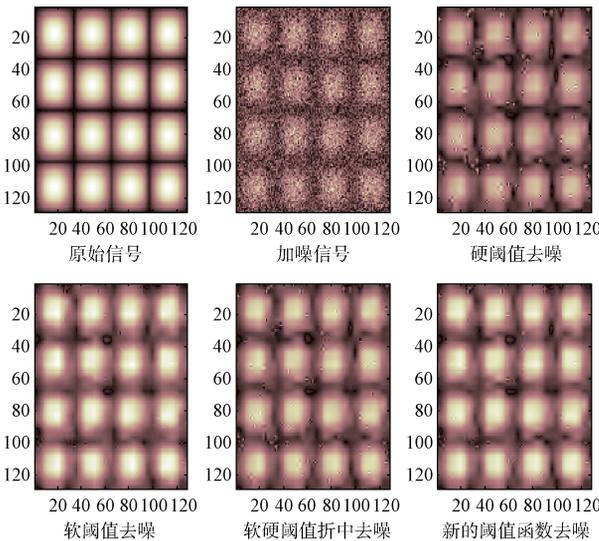


图 7  $\sigma=30$  时使用不同阈值函数去噪的对比

表 1 使用不同阈值函数去噪后的信噪比

	$\sigma=10$	$\sigma=20$	$\sigma=30$
含噪信号	13.203 7	7.183 1	3.661 3
硬阈值法	20.742 9	16.606 2	13.974 3
软阈值法	20.404 2	17.615 5	15.942 2
软硬阈值折中法	21.481 1	17.971 6	15.782 9
新阈值法	21.609 7	18.331 0	16.216 0

表 2 使用不同阈值函数去噪后的均方误差

	$\sigma=10$	$\sigma=20$	$\sigma=30$
含噪信号	102.195 1	408.780 7	919.756 5
硬阈值法	18.009 8	46.685 2	85.579 9
软阈值法	19.470 5	37.004 4	54.398 3
软硬阈值折中法	15.194 6	34.091 4	56.430 0
新阈值法	14.751 3	31.383 3	51.073 9

从图中处理后的图像可以看出,使用软阈值函数去噪后的图像较为光滑,使用硬阈值函数去噪后的图像存在一定的伪吉布斯效应,而软硬阈值折中法和新阈值法对此皆有相应地改善。从表 1 中的信噪比和表 2 中的均方误差的具体数据也可以看出,使用新阈值函数的去噪效果明显优于硬阈值函数和软阈值函数;而与软硬阈值折中函数相比,也可以看出新阈值函数存在一定的优势。除此之外,从表中的数据还可以得出,当图像的信噪比越低时,新阈值函数的优势体现的越明显。

## 6 结 论

本文在小波阈值去噪的基础上,结合传统的软硬阈值函数,提出了一种新的阈值函数。新的阈值函数综合了软硬阈值函数的优点,同时也克服了它们各自的缺点,不仅具有和软阈值函数一样的连续性,而且减小了估计的小波系数与处理之后的小波系数之间的恒定偏差,能有效地去除白噪声。另外,它还具有表达式简单且高阶可导、便于各种数学处理等优点。仿真实验结果表明,与传统的软硬阈值函数和改进的软硬阈值折中函数相比,新的阈值函数无论是从视觉效果上还是从信噪比和均方误差等具体的性能指标上都有了一定的改善。

## 参考文献

- [1] 赵庆平,陈得宝,姜恩华,等. 一种改进权重的非局部均值图像去噪算法[J]. 电子测量与仪器学报,2014, 28(3):334-339.
- [2] 王蓓,张根耀,李智,等. 基于新阈值函数的小波阈值去噪算法[J]. 计算机应用,2014,34(5):1499-1502.
- [3] 李金伦,崔少辉,汪明. 基于改进中值滤波和提升小波变换的阈值去噪方法研究[J]. 应用光学,2014, 35(5):817-822.
- [4] 武治国,王延杰,李桂菊. 应用小波变换的自适应脉冲耦合神经网络在图像融合中的应用[J]. 光学精密工程,2010,18(3):708-715.
- [5] 王智文,李绍滋. 基于多元统计模型的分形小波自适应图像去噪[J]. 计算机学报,2014, 37(6): 1380-1389.
- [6] 张艳,程小平. 针对医学图像的小波阈值去噪方法[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2011,36(3): 245-249.
- [7] 徐小军,王友仁,陈帅. 基于下采样分数阶小波变换的图像融合新方法[J]. 仪器仪表学报,2014,35(9): 2061-2069.
- [8] 刘丽梅,刘齐跃,张静. 基于小波变换模极大值的去噪方法研究[J]. 河北工业科技,2010, 27(6): 367-372.
- [9] 付伟,彭光剑. 基于小波阈值去噪的改进方法[J]. 电子测量技术,2009,29(6):46-48.

- [10] 邱爱中,邱大为,郝华辉. 一种新的平移不变多小波算法及其降噪法研究[J]. 国外电子测量技术,2013,23(10):5-7.
- [11] 许丽群. 小波阈值去噪改进算法研究[J]. 电子测量技术,2010,33(8):43-45.
- [12] 王靖,施刚,张磊. 运动模糊图像边缘振铃效应的抑制方法[J]. 电子测量技术,2013,36(5):62-67.
- [13] 王军. 一种改进的小波阈值高斯噪声图像降噪方法[J]. 计算机仿真,2011,28(2):295-299.
- [14] 韩丽. 小波域图像复原算法研究[D]. 呼和浩特:内蒙古工业大学,2009.
- [15] 魏晓巍. 小波在雷达图像去噪中的应用研究[D]. 哈

尔滨:哈尔滨理工大学,2014.

- [16] 陈芳. 绝缘子污秽检测中的红外热像处理方法研究[D]. 长沙:湖南大学,2009.

## 作者简介

**荣霞**,1992 年出生,硕士研究生在读,主要研究领域为图像处理研究。

E-mail: rx123feiyang@126.com

**薛伟**,1980 年出生,副教授,硕士研究生导师,主要研究领域为雷达信号检测与处理。

**朱继超**,1992 年出生,硕士研究生在读,主要研究领域为图像处理研究。

(上接第 83 页)

- [7] 申俊琦,胡绳荪,冯胜强. 激光视觉焊缝跟踪中图像二值化处理[J]. 天津大学学报,2011,44(4):308-312.
- [8] 郭思羽,周乐前,温和,等. 基于二值图像邻域加权的直线 Hough 变换[J]. 电子测量与仪器学报,2013,28(5):478-485.
- [9] 龚萍,张辉,毛征,等. 融合局部熵二维熵的空中目标跟踪算法研究[J]. 国外电子测量技术,2014,33(1):32-35.
- [10] 王震宇. 基于机器视觉钢板表面缺陷检测技术研究[J]. 计算机与现代化,2013,35(7):130-134.
- [11] 田原姬,黄合成,谭庆昌,等. 摄像机镜头畸变的研究[J]. 计算机工程与应用,2009,45(26):49-52.
- [12] 唐巍,叶东,袁锋,等. 视觉测量系统中一种独立的畸变校正算法[J]. 光电子·激光,2013,24(2):308-315.

- [13] 苏成志,王恩国,郝江涛,等. 平面几何测量中的图像畸变校正[J]. 光学精密工程,2011,19(1):161-167.

- [14] 杨飞飞,张春雷,李晓超,等. 机器视觉在点胶控制上的应用研究[J]. 中国西部科技,2014,13(7):34-35.

- [15] 陈鑫,顾全,杜天璠,等. 基于非接触式技术的工业点胶机计量测定装置研究[J]. 中国胶粘剂,2014,23(10):20-21.

## 作者简介

**谢俊**,1968 年出,博士,副教授,硕士生导师。主要研究方向:智能机械及机器人。

E-mail: xiejun@ujs.edu.cn

**朱广韬**,1990 年出生,硕士。主要研究方向:机器视觉技术的研究与应用。

E-mail:593606839@qq.com